Лекция 7

Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона и условия их вырождения

Модель ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона появилась в 1873 г., т.е. позже модели случайных блужданий, появившейся в 1713 г., но обе эти модели объединяет простота определений (для описания каждой модели надо знать лишь одно вероятностное распределение). Ветвящиеся процессы находят применение в биологии, ядерной физике и химии.

Опишем модель Гальтона-Ватсона в терминах размножающихся частиц. Пусть в нулевом поколении имеется одна частица. Она порождает k частиц с вероятностью $p_k,\ k \in \mathbb{N}_0$, а сама исчезает (предполагается, что $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$). Эти k частиц образуют первое поколение. Все частицы первого поколения независимо друг от друга и от числа частиц в первом поколении порождают каждая свое количество частиц в соответствии с тем же вероятностным распределением $\{p_k\}$, а сами исчезают. Получается второе поколение и.т.д. Обозначим Z_n число частиц в n-ом поколении, $n \in \mathbb{N}_0$. Эти Z_n частиц независимо друг от друга и от последовательности $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ порождают каждая свое количество частиц в соответствии с тем же вероятностным распределением $\{p_k\}$, а сами исчезают. Получается $(n+1)$-ое поколение. Случайная последовательность $\{Z_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ называется *ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона*.

Указанное определение можно формализовать. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введем последовательность независимых неотрицательных целочисленных случайных величин $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots$ с распределением $\{p_k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$, т.е. для произвольных $n, i \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(\alpha_i^{(n)} = k\right) = p_k$$

для каждого $k \in \mathbb{N}_0$. Предположим, что все последовательности

$$\left\{\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots\right\},\ \left\{\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots\right\},\ \ldots$$

независимы. Последовательность $\{Z_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ называется *ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона*, если $Z_0 = 1$ и для каждого $n \in \mathbb{N}_0$

$$Z_{n+1} = \alpha_1^{(n+1)} + \alpha_2^{(n+1)} + \ldots + \alpha_{Z_n}^{(n+1)}.$$

При этом Z_n означает число частиц в n-ом поколении, а $\alpha_i^{(n+1)}$ – число непосредственных потомков от i-ой частицы n-го поколения.

Чтобы найти распределение Z_{n+1} по известному прошлому, т.е. по известным значениям величин $Z_0, \ldots, Z_n$, надо на самом деле знать лишь значение Z_n. Это говорит о том, что последовательность $\{Z_n\}$ является счетной марковской цепью. Для ее анализа используем аппарат производящих функций.

Введем производящую функцию распределения $\{p_k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$:

$$\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad s \in [0,1].$$

Напомним, что прозводящая функция неотрицательной целочисленной случайной величины ξ равна по определению $\mathbf{E}s^{\xi}$ при $s \in [0,1]$. Заметим, что при $s \in [0,1]$

$$\mathbf{E}s^{Z_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Z_1 = k)\, s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \varphi(s).$$

Аналогично, для произвольных $n, i \in \mathbb{N}$ при $s \in [0,1]$

$$\mathbf{E}s^{\alpha_i^{(n)}} = \varphi(s).$$

По определению, $Z_2 = \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \ldots + \alpha_{Z_1}^{(2)}$, причем $Z_1, \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots$ – независимые случайные величины с одинаковой производящей функцией $\varphi(s)$. Поэтому производящая функция случайной величины Z_2 равна

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}s^{Z_2} &= \mathbf{E}s^{\alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(2)}+\ldots+\alpha_{Z_1}^{(2)}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(s^{\alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(2)}+\ldots+\alpha_k^{(2)}};\ Z_1 = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Z_1 = k)\, \mathbf{E}s^{\alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(2)}+\ldots+\alpha_k^{(2)}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \varphi^k(s) = \varphi(\varphi(s)).
\end{aligned}$$

Введем при $n \in \mathbb{N}$ производящую функцию случайной величины Z_n:

$$\varphi_n(s) = \mathbf{E}s^{Z_n},\ s \in [0,1].$$

По определению, $Z_n = \alpha_1^{(n)} + \alpha_2^{(n)} + \ldots + \alpha_{Z_{n-1}}^{(n)}$, причем $Z_{n-1}, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots$ – независимые случайные величины, при этом $\varphi(s)$ – производящая функция каждой из величин $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots$, а $\varphi_{n-1}(s)$ – производящая функция Z_{n-1}. Аналогично предыдущему показывается, что

$$\varphi_n(s) = \varphi_{n-1}(\varphi(s)) = \varphi_{n-2}(\varphi(\varphi(s))) = \ldots = \varphi(\varphi(\ldots\varphi(s)\ldots)). \tag{1}$$

В дальнейшем нам понадобится следующий результат из анализа.

Лемма 1. *Пусть $A := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ – сходящийся ряд с неотрицательными членами и $\psi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ при $s \in [0,1]$. Тогда*

$$\lim_{s \uparrow 1} \psi(s) = A, \tag{2}$$

$$\lim_{s \uparrow 1} \frac{\psi(s) - \psi(1)}{s-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \tag{3}$$

(*верно и когда ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k$ *сходится, и когда расходится*).

Доказательство. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k/A)\, s^k$ можно рассматривать как математическое ожидание дискретной случайной величины ξ_s, принимающей значения s^k с вероятностями a_k/A. По теореме о монотонной сходимости (в теории интеграла Лебега)

$$\lim_{s\uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{A} s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{A} = 1,$$

т.е. соотношение (2) доказано. Далее, что при $s \in [0,1)$

$$\frac{\psi(s) - \psi(1)}{s-1} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(s^k - 1\right)}{s-1} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{A} \left(1 + s + \ldots + s^{k-1}\right). \qquad (4)$$

Ряд в правой части соотношения (4) можно рассматривать как математическое ожидание дискретной случайной величины η_s, принимающей значения $\left(1 + s + \ldots + s^{k-1}\right)$ с вероятностями a_k/A. По теореме о монотонной сходимости

$$\lim_{s\uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{A} \left(1 + s + \ldots + s^{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a_k}{A}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) следует соотношение (3). Лемма доказана.

Замечание 1. Левая часть соотношения (3) является левой производной функции $\psi(s)$ в точке $s = 1$. Обозначим ее просто $\psi'(1)$.

Положим $m = \mathbf{E} Z_1$, т.е. $m = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k$. В силу леммы 1

$$m = \varphi'(1) \qquad (6)$$

(верно и при $m < +\infty$, и при $m = +\infty$). В дальнейшем предполагается, что

$$m < +\infty, \qquad (7)$$

$$p_0 + p_1 < 1. \qquad (8)$$

Положим $m_n = \mathbf{E} Z_n$. Классифицируем ветвящиеся процессы на основе асимптотического поведения m_n при $n \to \infty$. В силу (1) по лемме 1 и по теореме о производной сложной функции

$$m_2 = \varphi_2'(1) = \left(\varphi(\varphi(s))\right)'_{s=1} =$$

$$= \varphi'(\varphi(s))_{s=1}\, \varphi'(s)_{s=1} = \left(\varphi'(1)\right)^2 = m^2.$$

По индукции можно показать, что при $n \in \mathbb{N}$

$$m_n = \varphi_n'(1) = \left(\varphi'(1)\right)^n = m^n,$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \begin{cases} +\infty, & \text{если } m > 1; \\ 1, & \text{если } m = 1; \\ 0, & \text{если } m < 1. \end{cases}$$

В соответствии с этим процесс $\{Z_n\}$ называется *надкритическим*, если $m > 1$; *критическим*, если $m = 1$; *докритическим*, если $m < 1$.

Введем *момент вырождения* процесса $\{Z_n\}$:

$$T = \min\{n : \ Z_n = 0\}.$$

Ясно, что $Z_{T-1} \neq 0$, $Z_T = Z_{T+1} = \ldots = 0$. Гальтон и Ватсон нашли условия вырождения процесса $\{Z_n\}$ (см. теорему 1).

Укажем свойства производящей функции $\varphi(s)$. Поскольку $|\varphi(1)| < +\infty$, функция $\varphi(s)$, $s \in [0,1)$, непрерывна и ее можно почленно дифференцировать произвольное число раз (по теореме Абеля). Поскольку сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, то функция $\varphi(s)$ непрерывна при $s = 1$ и ее можно почленно дифференцировать при $s = 1$ (по лемме 1). Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$, то функция $\varphi'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k s^{k-1}$ непрерывна и ее можно почленно дифференцировать не только при $s \in [0,1)$, но и при $s = 1$ (см. лемму 1). Если сходится ряд $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k$, то функция $\varphi''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2}$ непрерывна не только при $s \in [0,1)$, но и при $s = 1$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (7) *и* (8). *В докритическом и критическом случаях*

$$\mathbf{P}(T < +\infty) = 1,$$

т.е. процесс $\{Z_n\}$ *вырождается с вероятностью* 1. *В надкритическом случае*

$$\mathbf{P}(T < +\infty) < 1,$$

т.е. процесс $\{Z_n\}$ *продолжается неограниченно долго с положительной вероятностью.*

Доказательство. Заметим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}(T \leq n) = \mathbf{P}(Z_n = 0) = \varphi_n(0).$$

Очевидно, события $\{T \leq n\}$ не убывают с ростом n, поэтому последовательность $\{\mathbf{P}(T \leq n)\}$ не убывает и существует

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(T \leq n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(0) := q.$$

По аксиоме непрерывности

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(T \leq n) = \mathbf{P}(T < +\infty).$$

В итоге

$$\mathbf{P}(T < +\infty) = q.$$

Найдем q. В силу (1) и непрерывности функции $\varphi(s)$ при $s \in [0,1]$

$$q = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\varphi_{n-1}(0)\right) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} \varphi_{n-1}(0)\right) = \varphi(q),$$

т.е. q является корнем уравнения

$$s = \varphi(s), \quad s \in [0,1]. \tag{9}$$

Напомним (см. (6) и (7)), что $m = \varphi'(1) < +\infty$. Поэтому, ввиду ранее сказанного, функция $\varphi(s)$ непрерывно дифференцируема при $s \in [0,1]$ и

$\varphi''(s)$ существует при $s \in [0,1)$. Кроме того, $\varphi(1) = 1$. Поэтому по формуле Тейлора для каждого $s \in [0,1)$ существует такое $u \in (s,1)$, что

$$\varphi(s) = 1 + (s-1)m + \frac{(s-1)^2}{2}\varphi''(u). \tag{10}$$

причем (см. (8)) $\varphi''(u) > 0$ при $u \in (0,1)$.

Если $m \leq 1$, то уравнение (9) имеет единственный корень $s = 1$, поскольку ввиду (10) при $s \in [0,1)$

$$\varphi(s) > 1 + (s-1)m \geq 1 + (s-1) = s.$$

Таким образом, если $m \leq 1$, то $q = 1$.

Если же $m > 1$, то наряду с корнем $s = 1$ уравнение (9) имеет еще один корень $s_0 \in [0,1)$. Действительно, функция $f(s) = \varphi(s) - s$ непрерывна при $s \in [0,1]$; далее, $f(0) \geq 0$ и $f(s) < 0$ в некотором интервале $(1-\varepsilon, 1)$, так как $f(1) = 0$ и $f'(1) > 0$; следовательно, существует хотя бы один нуль функции $f(s)$ на промежутке $[0,1)$; пусть s_0 – крайний слева из этих нулей; на интервале $(s_0, 1)$ функция $f(s)$ строго меньше нуля, поскольку эта функция строго выпукла вниз на отрезке $[0,1]$ и $f(s_0) = f(1) = 0$; на промежутке $[0, s_0)$ функция $f(s)$ строго больше нуля, поскольку у нее нет нулей левее точки s_0. Требуемое утверждение доказано.

Покажем, что если $m > 1$, то $\varphi_n(0) \to s_0$ при $n \to \infty$. Предположим противное, т.е. $\varphi_n(0) \to 1$ при $n \to \infty$ (заметим, что, ввиду (8), $\varphi_n(0) < 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$). Тогда по теореме Лагранжа при достаточно больших n

$$1 - \varphi_{n+1}(0) = \varphi(1) - \varphi(\varphi_n(0)) = \varphi'(u_n)(1 - \varphi_n(0)),$$

где $u_n \in (\varphi_n(0), 1)$. Поскольку функция $\varphi'(s)$ непрерывна при $s = 1$ и $\varphi'(1) = m > 1$, то $\varphi'(u_n) > 1$ при достаточно больших n. Из сказанного следует, что $1 - \varphi_{n+1}(0) > 1 - \varphi_n(0)$, т.е. $\varphi_{n+1}(0) < \varphi_n(0)$. Но это противоречит тому факту, что последовательность $\{\varphi_n(0)\}$, совпадающая с $\{\mathbf{P}(T \leq n)\}$, не убывает. Таким образом, если $m > 1$, то $q = s_0$. Теорема доказана.