Лекция 3

Локальная теорема восстановления

Определение 1. Распределение дискретной случайной величины называется *арифметическим*, если носитель этого распределения (т.е. множество возможных значений этой случайной величины) принадлежит решетке $\{0, \pm d, \pm 2d, \ldots\}$, где $d > 0$. Величина d называется *шагом* распределения. Если у распределения несколько различных шагов, то наибольший из них называется *максимальным шагом* распределения.

Рассмотрим процесс восстановления, в котором случайная величина X_1 имеет арифметическое распределение с максимальным шагом d. Тогда моменты восстановления $S_1, S_2, \ldots$ принимают значения из множества $d \cdot \mathbb{N}$. Положим

$$u_0 = 1, \quad u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_n = k\right), \quad k \in d \cdot \mathbb{N}.$$

Заметим, что $u_k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_n = k\right)$ при $k \in d \cdot \mathbb{N}_0$. Величина u_k при $k \in d \cdot \mathbb{N}$ представляет собою вероятность того, что момент времени k является моментом восстановления. Последовательность $\{u_k,\ k \in d \cdot \mathbb{N}_0\}$ связана с функцией восстановления $U(t)$:

$$u_k = U(k) - U(k-d), \quad k \in d \cdot \mathbb{N}.$$

Асимптотическое поведение функции $U(t)$ при $t \to \infty$ описывается интегральной теоремой восстановления, а асимптотический характер приращений этой функции описывается следующей *локальной теоремой восстановления* (называмой также *теоремой Блэкуэлла*). Напомним, что $a = \mathbf{E}X_1$.

Теорема 1. *Если распределение X_1 является арифметическим с максимальным шагом d и $a \in (0, +\infty]$, то*

$$\lim_{k \to \infty\ (k \in d \cdot \mathbb{N})} u_k = \frac{d}{a}.$$

Сначала установим вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если утверждение теоремы* 1 *справедливо, когда распределение X_1 является арифметическим с максимальным шагом* 1, *то оно справедливо и в случае, когда $d \neq 1$.*

Доказательство. Положим $\widetilde{X}_i = X_i / d$ при $i \in \mathbb{N}$ (ясно, что случайная величина $\widetilde{X}_1$ имеет арифметическое распределение с максимальным шагом 1). Введем соответствующие моменты восстановления $\widetilde{S}_n$ при $n \in \mathbb{N}_0$ и функцию $\widetilde{u}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что

$$\lim_{k \to \infty\ (k \in \mathbb{N})} \widetilde{u}_k = \frac{1}{\widetilde{a}}, \tag{1}$$

где $\widetilde{a} = \mathbf{E}\widetilde{X}_1 = a/d$. Заметим, что при $k \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{u}_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n = k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_n = kd\right) = u_{kd}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\lim_{k\to\infty\ (k\in\mathbb{N})} u_{kd} = \lim_{k\to\infty\ (k\in d\cdot\mathbb{N})} u_k = \frac{d}{a}.$$

Лемма доказана.

Далее рассматриваем только случай $d = 1$. Это означает, что случайная величина X_1 является целочисленной и

$$u_0 = 1, \quad u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_n = k\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Положим $f_k = \mathbf{P}\left(X_1 = k\right)$ при $k \in \mathbb{N}$ и $r_k = \sum_{l=k+1}^{\infty} f_l = \mathbf{P}\left(X_1 > k\right)$ при $k \in \mathbb{N}_0$. Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = 1, \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k = \mathbf{E}X_1 = a. \tag{4}$$

Лемма 2. *При $k \in \mathbb{N}$ справедливо тождество*

$$u_k = \sum_{l=1}^{k} f_l u_{k-l}. \tag{5}$$

Доказательство. Заметим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(S_n = k\right) = \sum_{l=1}^{k} \mathbf{P}\left(S_1 = l,\ S_n - S_1 = k - l\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \mathbf{P}\left(S_1 = l\right) \mathbf{P}\left(S_n - S_1 = k - l\right) = \sum_{l=1}^{k} f_l \mathbf{P}\left(S_{n-1} = k - l\right),$$

откуда суммированием по $n \in \mathbb{N}$ получаем утверждение леммы.

Лемма 3 (о потолочном значении). *Пусть неотрицательные и ограниченные сверху (например, единицей) последовательности*

$$\left\{v_m,\ m \in \mathbb{N}\right\},\ \left\{v_m^{(1)},\ m \in \mathbb{N}\right\},\ \left\{v_m^{(2)},\ m \in \mathbb{N}\right\},\ \ldots$$

связаны при каждом $m \in \mathbb{N}$ соотношением

$$v_m = \sum_{l=1}^{+\infty} f_l v_m^{(l)}. \tag{6}$$

Пусть для каждого $j \in \mathbb{N}$
$$\limsup_{m\to\infty} v_m^{(j)} \le \mu. \tag{7}$$
Если $\lim_{m\to\infty} v_m = \mu$, *то для каждого такого* $j \in \mathbb{N}$, *что* $f_j > 0$, *выполняется равенство*
$$\lim_{m\to\infty} v_m^{(j)} = \mu. \tag{8}$$

Доказательство. Предположим противное: $f_j > 0$ при некотором $j \in \mathbb{N}$, но соотношение (8) не выполняется. Положим
$$\liminf_{m\to\infty} v_m^{(j)} = \mu'. \tag{9}$$
Из (7) и (9) следует, что $\mu' \le \mu$. Отметим, что равенство $\mu' = \mu$ невозможно, поскольку в этом случае (см. (7) и (9))
$$\mu = \mu' = \liminf_{m\to\infty} v_m^{(j)} \le \limsup_{m\to\infty} v_m^{(j)} \le \mu,$$
т.е.
$$\liminf_{m\to\infty} v_m^{(j)} = \limsup_{m\to\infty} v_m^{(j)} = \mu,$$
что означает справедливость соотношения (8), а это невозможно в силу сделанного выше предположения. Итак,
$$\liminf_{m\to\infty} v_m^{(j)} = \mu' < \mu. \tag{10}$$

Зафиксируем такое натуральное N, что $N > j$. Тогда ввиду (6) при $m > N$
$$v_m \le \sum_{l=1}^{N} f_l v_m^{(l)} + \sum_{l=N+1}^{\infty} f_l. \tag{11}$$
Если $a_n = b_n + c_n$, то, как известно, $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n + \liminf_{n\to\infty} c_n$. Поэтому, учитывая соотношения (7) и (10), находим, что
$$\liminf_{m\to\infty} \sum_{l=1}^{N} f_l v_m^{(l)} \le \limsup_{m\to\infty} \sum_{l\in\{1,\ldots,N\}\setminus\{j\}} f_l v_m^{(l)} + f_j \liminf_{m\to\infty} v_m^{(j)} \le$$
$$\le \mu \sum_{l\in\{1,\ldots,N\}\setminus\{j\}} f_l + \mu' f_j \le \mu \sum_{l\in\mathbb{N}\setminus\{j\}} f_l + \mu' f_j.$$
Из (3) вытекает, что $\mu \sum_{l\in\mathbb{N}\setminus\{j\}} f_l + \mu' f_j < \mu$, поэтому $\mu \sum_{l\in\mathbb{N}\setminus\{j\}} f_l + \mu' f_j = \theta\mu$ при некотором $\theta \in (0,1)$, не зависящем от N. Следовательно,
$$\liminf_{m\to\infty} \sum_{l=1}^{N} f_l v_m^{(l)} \le \theta\mu. \tag{12}$$

Из соотношения (11) следует, что
$$\liminf_{m\to\infty} v_m \le \liminf_{m\to\infty} \sum_{l=1}^{N} f_l v_m^{(l)} + \sum_{l=N+1}^{\infty} f_l,$$

откуда, учитывая (12), находим, что

$$\liminf_{m\to\infty} v_m \le \theta\mu + \sum_{l=N+1}^{\infty} f_l.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ и учитывая, что $\lim_{N\to\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty} f_l = 0$ (см. (3)), получаем, что

$$\liminf_{m\to\infty} v_m \le \theta\mu < \mu.$$

Но это противоречит тому, что $\lim_{m\to\infty} v_m = \mu$. Лемма доказана.

Лемма 4. *При $k \in \mathbb{N}$ справедливо тождество*

$$\sum_{l=0}^{k} r_l u_{k-l} = 1.$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что

$$u_k = \sum_{l=1}^{k} f_l u_{k-l} = \sum_{l=1}^{k} (r_{l-1} - r_l)\, u_{k-l} = \sum_{l=1}^{k} r_{l-1} u_{k-l} - \sum_{l=1}^{k} r_l u_{k-l}.$$

Откуда, учитывая, что $u_k = r_0 u_k$ (т.к. $r_0 = 1$), находим, что

$$0 = \sum_{l=1}^{k} r_{l-1} u_{k-l} - \left(\sum_{l=1}^{k} r_l u_{k-l} + r_0 u_k\right) = \sum_{l=0}^{k-1} r_l u_{k-1-l} - \sum_{l=0}^{k} r_l u_{k-l}.$$

Следовательно,

$$\sum_{l=0}^{k} r_l u_{k-l} = \sum_{l=0}^{k-1} r_l u_{k-1-l} = \sum_{l=0}^{k-2} r_l u_{k-2-l} = \ldots = r_0 u_0 = 1.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Для простоты изложения предположим, что $f_j > 0$ при каждом $j \in \mathbb{N}$. Заметим, что $0 \le u_k \le 1$ при $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$\mu = \limsup_{k\to\infty} u_k, \qquad \nu = \liminf_{k\to\infty} u_k.$$

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что

$$\mu \le a^{-1}, \tag{13}$$

$$\nu \ge a^{-1}. \tag{14}$$

Сначала докажем соотношение (13).

По определению μ у последовательности $u_1, u_2, \ldots$ существует такая подпоследовательность $\{u_{k_m},\ m \in \mathbb{N}\}$, что

$$\lim_{m\to\infty} u_{k_m} = \mu. \tag{15}$$

Покажем, что при каждом $l \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} u_{k_m - l} = \mu. \tag{16}$$

Действительно, положим

$$v_m = u_{k_m}; \quad v_m^{(l)} = u_{k_m - l} \text{ при } 1 \le l \le k_m; \quad v_m^{(l)} = 0 \text{ при } l > k_m.$$

Тогда из соотношения (5) следует, что

$$v_m = \sum_{l=1}^{+\infty} f_l v_m^{(l)},$$

т.е выполнено соотношение (6). Выполнены и остальные условия леммы о потолочном значении, поэтому при каждом $l \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} v_m^{(l)} = \mu,$$

а это и означает справедливость соотношения (16).

Завершим доказательство соотношения (13). По лемме 4

$$\sum_{l=0}^{k_m} r_l u_{k_m - l} = 1.$$

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$. При $k_m \ge N$

$$\sum_{l=0}^{N} r_l u_{k_m - l} \le 1.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ и применяя (16), находим, что

$$\mu \sum_{l=0}^{N} r_l \le 1.$$

Переходя теперь к пределу при $N \to \infty$ и учитывая (4), получаем, что

$$\mu \sum_{l=0}^{\infty} r_l = \mu a \le 1,$$

откуда вытекает требуемое соотношение (13).

Теперь докажем соотношение (14). У последовательности $u_1, u_2, \ldots$ существует такая подпоследовательность $\{u_{k_m},\ m \in \mathbb{N}\}$, что

$$\lim_{m\to\infty} u_{k_m} = \nu. \tag{17}$$

Аналогично соотношению (16) можно показать, что если выполнено соотношение (17), то у последовательности $u_1, u_2, \ldots$ существует такая подпоследовательность $\{u_{k_m},\ m \in \mathbb{N}\}$, что при каждом $l \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} u_{k_m - l} = \nu. \tag{18}$$

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$. По лемме 4 при $k_m > N$,

$$\sum_{l=0}^{N} r_l u_{k_m - l} + \sum_{l=N+1}^{k_m} r_l \geq 1.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ и учитывая соотношение (18), находим, что

$$\nu \sum_{l=0}^{N} r_l + \sum_{l=N+1}^{\infty} r_l \geq 1.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ и учитывая, что $\lim_{N\to\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} r_l = 0$ (см. (4)), получаем, что

$$\nu \sum_{l=0}^{\infty} r_l = \nu a \geq 1,$$

откуда следует требуемое соотношение (14). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В общем случае рассуждения немного усложнятся. Пусть распределение случайной величины X_1 является арифметическим с максимальным шагом 1. Это означает, что НОД$\{j \in \mathbb{N} : f_j > 0\} = 1$. Следовательно, существуют такие числа $j_1, j_2, \ldots, j_r \in \mathbb{N}$, что $f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_r}$ положительны и НОД$\{j_1, j_2, \ldots, j_r\} = 1$. Если соотношение (15) справедливо, то по лемме 3 для произвольных натуральных чисел $l_1, l_2, \ldots, l_r$

$$\mu = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - j_1} = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - 2j_1} = \ldots = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - l_1 j_1}$$

и, следовательно,

$$\mu = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - l_1 j_1 - j_2} = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - l_1 j_1 - 2j_2} = \ldots = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - l_1 j_1 - l_2 j_2}$$

и т.д.,

$$\mu = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - l_1 j_1 - l_2 j_2 - \ldots - l_r j_r}.$$

Нетрудно показать, что все достаточно большие натуральные числа могут быть представлены в виде $l_1 j_1 + l_2 j_2 + \ldots + l_r j_r$ при соответствующем подборе натуральных чисел $l_1, l_2, \ldots, l_r$. Таким образом, $\lim_{m\to\infty} u_{k_m - l} = \mu$ при всех l, превосходящих некоторое число $L \in \mathbb{N}$. Положим $p_m = k_m - L$, тогда при всех натуральных l

$$\lim_{m\to\infty} u_{p_m - l} = \mu.$$

Теперь надо повторить доказательство теоремы 1, начиная со слов "Завершим доказательство соотношения (13)". При этом вместо k_m надо рассматривать p_m.