Лекции 6

Предельная теорема для неприводимых марковских цепей

Установим предельную теорему для марковских цепей. Эта теорема для конечных цепей с положительными переходными вероятностями была установлена Марковым, а для неприводимых счетных цепей – Колмогоровым (см. теорему 1).

Определение 1. Марковская цепь называется *неприводимой*, если ее произвольные два состояния являются сообщающимися.

Определение 2. Неприводимая марковская цепь называется *возвратной* (*положительно возвратной* и т.д.), если возвратно (положительно возвратно и т.д.) хотя бы одно ее состояние (а значит, и все остальные).

Теорема 1. *Пусть* $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *– неприводимая положительно возвратная и непериодическая марковская цепь с множеством состояний* S. *Тогда для произвольной пары* $k, i \in S$ *существует положительный предел*

$$\lim_{n \to \infty} p_{ki}(n) = \pi_i, \tag{1}$$

не зависящий от k. *Набор чисел* π_i, $i \in S$, *является единственным неотрицательным решением системы уравнений*

$$\sum_{i \in S} x_i = 1; \qquad \sum_{j \in S} p_{ji} x_j = x_i, \quad i \in S. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть цепь стартует из состояния i. Заметим (см. соотношения (3) и (4) предыдущей лекции), что при $n \in \mathbb{N}$

$$p_{ii}(n) = u_n, \tag{3}$$

где

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}^{(i)}(T_k = n).$$

Здесь величины $T_1, T_2, \ldots$ можно воспринимать как моменты восстановления вложенного процесса восстановления $\{\nu(t),\ t \geq 0\}$. По условию теоремы распределение случайной величины T_1 является арифметическим с максимальным шагом 1 и $\mathbf{E}^{(i)} T_1 := a < +\infty$. По локальной теореме восстановления

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \pi_i,$$

где $\pi_i = 1/a > 0$. Следовательно, ввиду (3)

$$\lim_{n \to \infty} p_{ii}(n) = \pi_i. \tag{4}$$

Пусть k – произвольное состояние, не равное i. Предположим, что цепь стартует из состояния k и $T_{k,i}$ – момент первого попадания марковской цепи в состояние i. В силу леммы 1 лекции 5

$$\mathbf{P}^{(k)}\left(T_{k,i} < +\infty\right) = 1. \tag{5}$$

Положим при $n \in \mathbb{N}$

$$f_{ki}\left(n\right) = \mathbf{P}^{(k)}\left(T_{k,i} = n\right).$$

Ввиду (5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ki}\left(n\right) = \mathbf{P}^{(k)}\left(T_{k,i} < +\infty\right) = 1. \tag{6}$$

По формуле полной вероятности (по значениям $T_{k,i}$) при $n \in \mathbb{N}$

$$p_{ki}\left(n\right) = \sum_{l=1}^{n} f_{ki}\left(l\right) p_{ii}\left(n-l\right).$$

Откуда, полагая $p_{ii}\left(n\right) = 0$ при $n \in \{-1, -2, \ldots\}$, находим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$p_{ki}\left(n\right) = \sum_{l=1}^{\infty} f_{ki}\left(l\right) p_{ii}\left(n-l\right).$$

Ввиду (6) выражение справа имеет смысл математического ожидания, поэтому на основании теоремы о мажорируемой сходимости и соотношения (4) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} p_{ki}\left(n\right) = \sum_{l=1}^{\infty} f_{ki}\left(l\right) \lim_{n\to\infty} p_{ii}\left(n-l\right) = \pi_i \sum_{l=1}^{\infty} f_{ki}\left(l\right).$$

Откуда, снова учитывая (6), видим, что

$$\lim_{n\to\infty} p_{ki}\left(n\right) = \pi_i. \tag{7}$$

Из соотношений (4) и (7) следует (1).

Перейдем к доказательству второй части утверждения теоремы. Поскольку $\sum_{i\in S} p_{ki}\left(n\right) = 1$ при $n \in \mathbb{N}$, находим, что для каждого $K \in \mathbb{N}$

$$1 \geq \liminf_{n\to\infty} \sum_{i\in S,\ i\leq K} p_{ki}\left(n\right) \geq \sum_{i\in S,\ i\leq K} \liminf_{n\to\infty} p_{ki}\left(n\right) = \sum_{i\in S,\ i\leq K} \pi_i$$

и, следовательно,

$$1 \geq \sum_{i\in S} \pi_i. \tag{8}$$

Ввиду уравнения Колмогорова-Чепмена при $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k\in S} p_{jk}\left(n\right) p_{ki} = p_{ji}\left(n+1\right),$$

поэтому для каждого $K \in \mathbb{N}$

$$\pi_i \geq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k\in S,\ k\leq K} p_{jk}\left(n\right) p_{ki} \geq \sum_{k\in S,\ k\leq K} \liminf_{n\to\infty} p_{jk}\left(n\right) p_{ki} = \sum_{k\in S,\ k\leq K} \pi_k p_{ki}$$

и, следовательно,
$$\pi_i \geq \sum_{k\in S} \pi_k p_{ki}. \tag{9}$$

Покажем, что на самом деле при всех $i \in S$
$$\pi_i = \sum_{k\in S} \pi_k p_{ki}. \tag{10}$$

Предположим, что $\sum_{k\in S} \pi_k p_{ki_0} < \pi_{i_0}$ при некотором $i_0 \in S$. Тогда (см. (9))
$$\sum_{i\in S} \pi_i > \sum_{i\in S}\sum_{k\in S} \pi_k p_{ki} = \sum_{k\in S} \pi_k \sum_{i\in S} p_{ki} = \sum_{k\in S} \pi_k,$$
что невозможно. Итак, соотношение (10) установлено.

Из соотношения (10) выведем методом математической индукции, что при всех $n \in \mathbb{N}$
$$\pi_i = \sum_{k\in S} \pi_k p_{ki}(n). \tag{11}$$

При $n = 1$ это соотношение справедливо ввиду (10). Осталось показать, что если (11) справедливо при некотором $n \in \mathbb{N}$, то оно справедливо при $(n+1)$. В самом деле, ввиду уравнения Колмогорова-Чепмена
$$\sum_{k\in S} \pi_k p_{ki}(n+1) = \sum_{k\in S} \pi_k \sum_{l\in S} p_{kl}(n)\, p_{li} = \sum_{l\in S} p_{li} \sum_{k\in S} \pi_k p_{kl}(n) = \sum_{l\in S} p_{li}\pi_l = \pi_i,$$
что требовалось доказать.

К правой части соотношения (11) можно применить теорему о мажорируемой сходимости ввиду соотношения (8), поэтому
$$\pi_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in S} \pi_k p_{ki}(n) = \sum_{k\in S} \pi_k \lim_{n\to\infty} p_{ki}(n) = \pi_i \sum_{k\in S} \pi_k.$$

Итак, $\pi_i = \pi_i \sum_{k\in S} \pi_k$ и $\pi_i > 0$. Следовательно,
$$\sum_{k\in S} \pi_k = 1. \tag{12}$$

Соотношения (10) и (12) означают, что последовательность $\pi_1, \pi_2, \ldots$ является решением системы уравнений (2).

Установим единственность. Пусть справедливо соотношение (2) для неотрицательных $x_i,\ i \in S$. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$
$$x_i = \sum_{k\in S} x_k p_{ki}(n) \tag{13}$$
(соотношение (13) выводится так же, как (11)). К правой части соотношения (13) можно применить теорему о мажорируемой сходимости ввиду того, что $x_k \geq 0$ при $k \in S$ и $\sum_{k\in S} x_k = 1$, поэтому
$$x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in S} x_k p_{ki}(n) = \sum_{k\in S} x_k \lim_{n\to\infty} p_{ki}(n) = \sum_{k\in S} x_k \pi_i = \pi_i \sum_{k\in S} x_k = \pi_i.$$

Таким образом, единственность решения системы уравнений (2) установлена. Теорема доказана.

Придадим теореме 1 вид предельной теоремы в обычном понимании.

Утверждение 1. *Если* $\{\xi_n\}$ – *марковская цепь, удовлетворяющая условиям теоремы* 1, *то при* $n \to \infty$

$$\{\xi_n\} \xrightarrow{D} \xi,$$

где ξ – *случайная величина со значениями в* S, *причем* $\mathbf{P}(\xi = i) = \pi_i$ *при* $i \in S$.

Доказательство. Заметим, что если $\{p_k,\ k \in S\}$ – начальное распределение, то при $i \in S$

$$\mathbf{P}(\xi_n = i) = \sum_{k \in S} p_k p_{ki}(n). \tag{14}$$

К правой части соотношения (14) можно применить теорему о мажорируемой сходимости, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\xi_n = i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k \in S} p_k p_{ki}(n) = \sum_{k \in S} p_k \lim_{n\to\infty} p_{ki}(n) = \sum_{k \in S} p_k \pi_i = \pi_i.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим марковскую цепь $\{\xi_n\}$ с множеством состояний S (условия теоремы 1 при этом могут быть не выполнены). Каждое неотрицательное решение $\pi_1, \pi_2, \ldots$ системы уравнений (2) задает распределение вероятностей на множестве S. Это распределение называется *стационарным.*

Утверждение 2. *Если начальное распределение марковской цепи* $\{\xi_n\}$ *является стационарным, то эта цепь является стационарной случайной последовательностью, т.е. для произвольных* $n \in \mathbb{N}_0$ *и* $l \in \mathbb{N}$

$$(\xi_0, \ldots, \xi_n) \stackrel{D}{=} (\xi_l, \ldots, \xi_{l+n}).$$

Доказательство. Если $\mathbf{P}(\xi_0 = j) = \pi_j$ при $j \in S$, то (см. (13)) при $l \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}(\xi_l = i) = \sum_{j \in S} \mathbf{P}(\xi_0 = j,\ \xi_l = i) = \sum_{j \in S} \mathbf{P}(\xi_0 = j)\, p_{ji}(l) = \sum_{j \in S} \pi_j p_{ji}(l) = \pi_i$$

Следовательно, $\xi_l \stackrel{D}{=} \xi_0$. Поэтому, учитывая лемму 1 лекции 4, находим, что при $i_0, \ldots, i_n \in S$

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\left(\xi_l = i_0, \ldots, \xi_{l+n} = i_n\right) = \\ = \mathbf{P}(\xi_l = i_0)\, \mathbf{P}\left(\xi_{l+1} = i_1, \ldots, \xi_{l+n} = i_n \mid \xi_l = i_0\right) = \\ = \mathbf{P}(\xi_0 = i_0) \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1} i_k} = \mathbf{P}(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_n = i_n),\end{gathered}$$

что требовалось доказать.

Рассмотрим пример применения теоремы 1.

Случайное блуждание с двумя экранами. Предположим, что блуждание имеет два экрана: в точке 0 и в точке $m \in \mathbb{N}$, и стартует из точки $l \in \mathbb{N}$, причем $0 < l < m$. Предположим, что оба экрана являются отражающими. Это означает, что блуждающая частица до момента попадания в состояния 0 или m движется так же, как в случае простого случайного блуждания. При попадании в состояние 0 частица в следующий целый момент времени либо остается в этом состоянии с вероятностью q, либо переходит в состояние 1 с вероятностью p. При попадании в состояние m в следующий целый момент времени частица либо остается на месте с вероятностью p, либо переходит в состояние $(m-1)$ с вероятностью q. Множеством состояний является множество $S = \{0, 1, \ldots, m\}$. Переходная матрица размером $(m+1) \times (m+1)$ имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & q & p \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта цепь является неприводимой. Конечная неприводимая марковскоя цепь является положительно возвратной (докажите сами). Состояние 0 является непериодическим, поскольку $p_{00} = q > 0$. Следовательно, рассматриваемая марковская цепь является непериодической. Таким образом, рассматриваемая цепь удовлетворяет условиям теоремы 1. Найдем пределы переходных вероятностей. Система уравнений (2) принимает следующий матричный вид:

$$\sum\nolimits_{i=0}^{m} x_i = 1, \qquad \overline{x}P = \overline{x},$$

где P – переходная матрица, $\overline{x} = (x_0, \ldots, x_m)$. Следовательно,

$$(x_0, \ldots, x_m) \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & q & p \end{pmatrix} = (x_0, \ldots, x_m)$$

или

$$\begin{cases} x_0 = qx_0 + qx_1 & , \\ x_1 = px_0 + qx_2 & , \\ x_2 = px_1 + qx_3 & , \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_{m-1} = px_{m-2} + qx_m, & \\ x_m = px_{m-1} + px_m & . \end{cases}$$

Откуда, вспоминая, что $p + q = 1$, получаем, что

$$\begin{cases} px_0 = qx_1 & , \\ p\,(x_1 - x_0) = q\,(x_2 - x_1) & , \\ p\,(x_2 - x_1) = q\,(x_3 - x_2) & , \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ p\,(x_{m-1} - x_{m-2}) = q\,(x_m - x_{m-1})\,, & \\ qx_m = px_{m-1} & . \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $x_1 = \gamma x_0$, где $\gamma = p/q$. Из второго и последующих уравнений, полагая $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ при $i \in \{1, \ldots, m\}$, получаем, что

$$\Delta_i = \gamma \Delta_{i-1} = \gamma^2 \Delta_{i-2} = \ldots = \gamma^{i-1} \Delta_1 = \gamma^{i-1} (\gamma - 1) \, x_0.$$

Следовательно, при $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$x_i = \sum_{l=1}^{i} \Delta_l + x_0 = \sum_{l=1}^{i} \gamma^{l-1} (\gamma - 1) \, x_0 + x_0 = \gamma^i x_0.$$

Складывая все эти равенства и равенство $x_0 = x_0$, находим, что

$$1 = \sum\nolimits_{i=0}^{m} \gamma^i x_0,$$

т.е.

$$x_0 = \frac{1}{\sum_{l=0}^{m} \gamma^l}, \quad x_i = \frac{\gamma^i}{\sum_{l=0}^{m} \gamma^l}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

По теореме 1 при $k, i \in S$

$$\lim_{n \to \infty} p_{ki} (n) = x_i = \frac{\gamma^i}{\sum_{l=0}^{m} \gamma^l}.$$