Лекция 1

Понятие случайного процесса.
Процесс Пуассона

В теории вероятностей основными объектами исследований являются *случайные величины и векторы.* Напомним их определение. Пусть задано некоторое *вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. На числовой прямой $\mathbb{R}$ рассмотрим *борелевскую σ-алгебру* $\mathcal{B}$ (так называется минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества прямой $\mathbb{R}$). *Случайной величиной* называется отображение ξ вероятностного пространства Ω на числовую прямую $\mathbb{R}$, *измеримое* относительно пары σ-алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$. Это означает, что для произвольного множества $A \in \mathcal{B}$ его прообраз $\xi^{-1}(A)$ принадлежит $\mathcal{F}$.

Случайным вектором называется упорядоченная совокупность случайных величин $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, $m \in \mathbb{N}$, заданных на одном вероятностном пространстве. Равносильное определение случайного вектора состоит в следующем. Так называется отображение $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ вероятностного пространства Ω на $\mathbb{R}^m$, измеримое относительно пары σ-алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}^m$, где $\mathcal{B}^m$ – борелевская σ-алгебра пространства $\mathbb{R}^m$.

В теории случайных процессов рассматриваются случайные явления, *развивающиеся во времени.* Дадим определение основных объектов этой теории. Пусть $\mathbb{N}_0$ означает множество $\{0, 1, \ldots\}$.

Определение 1. *Случайной последовательностью* называется последовательность случайных величин ξ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, заданных на одном вероятностном пространстве.

Определение 2. *Случайным процессом* называется совокупность случайных величин $X(t)$, зависящих от параметра $t \geq 0$ и заданных на одном вероятностном пространстве. Случайный процесс обозначается $\{X(t),\ t \geq 0\}$, или $\{X(t)\}$, или просто X.

Напомним, что основным инструментом исследования случайной величины ξ является ее *распределение.* Так называется вероятностная мера $\mathbf{P}^{(\xi)}$ на измеримом пространстве $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, задаваемая равенством

$$\mathbf{P}^{(\xi)}(A) = \mathbf{P}(\xi \in A), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Часто вместо распределения рассматривают *функцию распределения*

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi \in (-\infty, x]) = \mathbf{P}(\xi \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Аналогично распределением случайного вектора $\overline{\xi}$ называется вероятностная мера $\mathbf{P}^{(\overline{\xi})}$ на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^m,\mathcal{B}^m)$, задаваемая равенством

$$\mathbf{P}^{(\overline{\xi})}(A) = \mathbf{P}\left(\overline{\xi} \in A\right), \quad A \in \mathcal{B}^m.$$

Определение 3. *Конечномерным распределением* случайного процесса X, отвечающим моментам времени $t_1, \ldots, t_m$ $(0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$, $m \in \mathbb{N}$, называется распределение случайного вектора $(X(t_1), \ldots, X(t_m))$, т.е. следующая вероятностная мера на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$:

$$\mathbf{P}^{(X)}_{t_1,\ldots,t_m}(A) = \mathbf{P}((X(t_1), \ldots, X(t_m)) \in A), \qquad A \in \mathcal{B}^m.$$

Рассмотрим *примеры* случайных последовательностей и процессов.

Случайное блуждание. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Положим

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ называется *случайным блужданием.* Поскольку S_n является случайной величиной при каждом $n \in \mathbb{N}_0$, то указанная последовательность является случайной. Отметим, что при $n, m \in \mathbb{N}$ случайные величины $S_{n+m} - S_n$ и S_n являются независимыми, причем $S_{n+m} - S_n \stackrel{d}{=} S_m$ (символ $\stackrel{d}{=}$ означает совпадение распределений).

Значительный интерес в дальнейшем представляет ситуация, когда случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, т.е.

$$\mathbf{P}(X_1 > t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Найдем одномерные распределения последовательности $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$.

Лемма 1. *Пусть ξ, η – независимые случайные величины, $f(x,y)$ – измеримое отображение $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$ и A – произвольное одномерное борелевское множество. Если η – дискретная случайная величина, принимающая значения x_i, $i \in \mathbf{N}$, причем $\mathbf{P}(\eta = x_i) = p_i$, то*

$$\mathbf{P}(f(\xi, \eta) \in A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(f(\xi, x_i) \in A)\, p_i.$$

Если η – случайная величина с плотностью вероятностей $p(\cdot)$, то

$$\mathbf{P}(f(\xi, \eta) \in A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(f(\xi, x) \in A)\, p(x)\, dx.$$

Доказательство. В дискретном случае по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(f(\xi, \eta) \in A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(f(\xi, \eta) \in A \mid \eta = x_i)\, p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(f(\xi, x_i) \in A \mid \eta = x_i)\, p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(f(\xi, x_i) \in A)\, p_i.$$

В непрерывном случае доказательство проведите самостоятельно.

Теорема 1. *Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, то при $t > 0$*

$$\mathbf{P}\left(S_n > t\right) = \left(1 + \lambda t + \frac{\left(\lambda t\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(\lambda t\right)^{n-1}}{(n-1)!}\right) e^{-\lambda t}. \tag{1}$$

Доказательство. Соотношение (1) устанавливается по индукции. При $n = 1$ оно справедливо, поскольку X_1 имеет показательное распределение с параметром λ. Предположим, что (1) справедливо при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда по лемме 1

$$\mathbf{P}\left(S_{n+1} > t\right) = \mathbf{P}\left(S_{n+1} > t,\ X_{n+1} > t\right) + \mathbf{P}\left(S_{n+1} > t,\ X_{n+1} \leq t\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(X_{n+1} > t\right) + \mathbf{P}\left(S_n + X_{n+1} > t,\ X_{n+1} \leq t\right) =$$

$$= e^{-\lambda t} + \int\limits_0^t \mathbf{P}\left(S_n + x > t\right) \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= e^{-\lambda t} + \int\limits_0^t \left(1 + \lambda\left(t - x\right) + \ldots + \frac{\left(\lambda\left(t-x\right)\right)^{n-1}}{(n-1)!}\right) e^{-\lambda(t-x)} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= e^{-\lambda t} + \left(\lambda t + \frac{\left(\lambda t\right)^2}{2!} \ldots + \frac{\left(\lambda t\right)^n}{n!}\right) e^{-\lambda t},$$

т.е. соотношение (1) справедливо и при $n + 1$. Теорема доказана.

Процесс восстановления. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных *положительных* случайных величин и $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\nu\left(0\right) = 0, \qquad \nu\left(t\right) = \max\left\{n \in \mathbf{N}_0 : S_n \leq t\right\}, \quad t > 0.$$

Величина $\nu\left(t\right)$ при фиксированном $t > 0$ принимает целые неотрицательные значения. Множество $\{\nu\left(t\right) = k\}$ при $k \in \mathbb{N}_0$ совпадает с множеством $\{S_k \leq t\} \cap \{S_{k+1} > t\}$. Следовательно, множество $\{\nu\left(t\right) = k\}$ является случайным событием. Таким образом, величина $\nu\left(t\right)$ при фиксированном $t > 0$ является случайной. А это означает, что $\{\nu\left(t\right),\ t \geq 0\}$ образует случайный процесс, который называется *процессом восстановления.*

Наглядно его можно представить следующим образом. В момент времени 0 начинает функционировать некоторый прибор, срок службы которого равен X_1, в момент X_1 (равный S_1) выхода из строя этого прибора он мгновенно заменяется на следующий прибор, срок службы которого равен X_2. В момент $X_1 + X_2$ (равный S_2) выхода из строя второго прибора он мгновенно заменяется на следующий прибор, срок службы которого равен X_3 и т.д. Величины $S_1, S_2, \ldots$ называются соответственно первым, вторым и т.д. *моментами восстановления.* Величина $\nu\left(t\right)$ при этом равна числу восстановлений до момента t включительно.

Определение 4. *Процессом Пуассона* называется частный случай процесса восстановления $\{\nu\left(t\right),\ t \geq 0\}$, когда случайные величины $X_1, X_2, \ldots$

имеют показательное распределение с параметром $\lambda > 0$. При этом параметр λ называется *интенсивностью* процесса Пуассона.

Найдем конечномерные распределения процесса Пуассона. Напомним, что случайная величина η имеет *распределение Пуассона* с параметром a (короткая запись: $\eta \sim \Pi_a$), если η принимает значения из $\mathbb{N}_0$ и

$$\mathbf{P}\left(\eta = n\right) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть* $\{\nu\left(t\right),\ t \ge 0\}$ *– процесс Пуассона, тогда при* $t > 0$

$$\nu\left(t\right) \sim \Pi_{\lambda t}.$$

Доказательство. Поскольку при $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{\nu\left(t\right) = n\} = \{S_n \le t,\ S_{n+1} > t\} = \{S_{n+1} > t\} \setminus \{S_n > t\}, \tag{3}$$

то по теореме 1

$$\mathbf{P}\left(\nu\left(t\right) = n\right) = \mathbf{P}\left(S_{n+1} > t\right) - \mathbf{P}\left(S_n > t\right) = \frac{\left(\lambda t\right)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Вспоминая соотношение (2), получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. Если $\eta \sim \Pi_a$, то $\mathbf{E}\eta = a$. Следовательно, $\mathbf{E}\nu\left(1\right) = \lambda$. Итак, λ – среднее число восстановлений за единицу времени. Это объясняет, почему параметр λ называется интенсивностью процесса Пуассона.

Лемма 2. *В условиях теоремы* 1 *при* $n, m \in \mathbb{N}_0$ и $t, s > 0$

$$\mathbf{P}\left(\, S_{n+m} > t + s \mid \nu\left(t\right) = n\right) = \mathbf{P}\left(S_m > s\right). \tag{4}$$

Доказательство. При $m = 0$ соотношение (4) справедливо, поскольку его правая и левая части равны 0.

Установим (4) при $m = 1$ и произвольном s. При $s < 0$ обе части (4) равны 1. Заметим, что при $s \ge 0$

$$\mathbf{P}\left(S_{n+1} > t + s,\ \nu\left(t\right) = n\right) = \mathbf{P}\left(S_{n+1} > t + s,\ S_n \le t,\ S_{n+1} > t\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(S_{n+1} > t + s,\ S_n \le t\right). \tag{5}$$

Пусть $f_n\left(\cdot\right)$ – плотность вероятностей случайной величины S_n (см. теорему 1). По лемме 1

$$\mathbf{P}\left(S_{n+1} > t + s,\ S_n \le t\right) = \mathbf{P}\left(S_n + X_{n+1} > t + s,\ S_n \le t\right) =$$

$$= \int\limits_0^t \mathbf{P}\left(x + X_{n+1} > t + s\right) f_n\left(x\right) dx = e^{-\lambda s} \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-x)} f_n\left(x\right) dx. \tag{6}$$

Из соотношения (6) при $s = 0$ следует, что

$$\mathbf{P}\left(S_{n+1} > t,\ S_n \leq t\right) = \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-x)} f_n\left(x\right) dx. \tag{7}$$

Из соотношений (6) и (7) вытекает, что

$$\mathbf{P}\left(S_{n+1} > t + s,\ S_n \leq t\right) = e^{-\lambda s} \mathbf{P}\left(S_{n+1} > t,\ S_n \leq t\right).$$

Откуда, вспоминая соотношения (3) и (5), находим, что

$$\mathbf{P}\left(S_{n+1} > t + s,\ \nu\left(t\right) = n\right) = e^{-\lambda s} \mathbf{P}\left(\nu\left(t\right) = n\right). \tag{8}$$

После деления (8) на $\mathbf{P}\left(\nu\left(t\right) = n\right)$ получаем (4) при $m = 1$.

Пусть $m > 1$. Очевидно,

$$\mathbf{P}\left(S_{n+m} > t + s \mid \nu\left(t\right) = n\right) = \mathbf{P}\left(S_{n+1} > t + s - \eta \mid \nu\left(t\right) = n\right), \tag{9}$$

где $\eta = S_{n+m} - S_{n+1} \stackrel{d}{=} S_{m-1}$. Случайная величина η не зависит от величины S_{n+1} и события $\{\nu\left(t\right) = n\}$, поэтому по лемме 1

$$\mathbf{P}\left(S_{n+1} > t + s - \eta \mid \nu\left(t\right) = n\right) =$$

$$= \int\limits_0^\infty f_{m-1}\left(x\right) \mathbf{P}\left(S_{n+1} > t + s - x \mid \nu\left(t\right) = n\right) dx. \tag{10}$$

Учитывая, что утверждение леммы доказано при $m = 1$, заключаем, что

$$\mathbf{P}\left(S_{n+1} > t + s - x \mid \nu\left(t\right) = n\right) = \mathbf{P}\left(S_1 > s - x\right). \tag{11}$$

Из соотношений (9)-(11) находим, что

$$\mathbf{P}\left(S_{n+m} > t + s \mid \nu\left(t\right) = n\right) = \int\limits_0^\infty f_{m-1}\left(x\right) \mathbf{P}\left(S_1 > s - x\right) dx. \tag{12}$$

По лемме 1

$$\mathbf{P}\left(S_m > s\right) = \mathbf{P}\left(S_{m-1} + X_m > s\right) = \int\limits_0^\infty f_{m-1}\left(x\right) \mathbf{P}\left(S_1 > s - x\right) dx. \tag{13}$$

Сравнивая (12) и (13), получаем (4). Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть $\{\nu\left(t\right),\ t \geq 0\}$ – процесс Пуассона, тогда при $t, s > 0$ случайные величины $\nu\left(t\right)$ и $\nu\left(t+s\right) - \nu\left(t\right)$ независимы, т.е. для произвольных $n, m \in \mathbb{N}_0$*

$$\mathbf{P}\left(\nu\left(t\right) = n,\ \nu\left(t+s\right) - \nu\left(t\right) = m\right) = \mathbf{P}\left(\nu\left(t\right) = n\right) \mathbf{P}\left(\nu\left(t+s\right) - \nu\left(t\right) = m\right).$$

Кроме того, $\nu\left(t+s\right) - \nu\left(t\right) \stackrel{d}{=} \nu\left(s\right)$, т.е. для произвольного $m \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{P}\left(\nu\left(t+s\right) - \nu\left(t\right) = m\right) = \mathbf{P}\left(\nu\left(s\right) = m\right).$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что

$$\mathbf{P}\left(\nu\left(t+s\right)=n+m \mid \nu\left(t\right)=n\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(S_{n+m}\leq t+s,\ S_{n+m+1}>t+s \mid \nu\left(t\right)=n\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\ S_{n+m+1}>t+s \mid \nu\left(t\right)=n\right)-\mathbf{P}\left(S_{n+m}>t+s \mid \nu\left(t\right)=n\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(S_{m+1}>s\right)-\mathbf{P}\left(S_{m}>s\right)=\mathbf{P}\left(S_{m}\leq s,\ S_{m+1}>s\right)=\mathbf{P}\left(\nu\left(s\right)=m\right).$$

Значит,

$$\mathbf{P}\left(\nu\left(t\right)=n,\ \nu\left(t+s\right)=n+m\right)=\mathbf{P}\left(\nu\left(t\right)=n\right)\mathbf{P}\left(\nu\left(s\right)=m\right). \qquad (14)$$

Формулу (14) можно переписать:

$$\mathbf{P}\left(\nu\left(t\right)=n,\ \nu\left(t+s\right)-\nu\left(t\right)=m\right)=\mathbf{P}\left(\nu\left(t\right)=n\right)\mathbf{P}\left(\nu\left(s\right)=m\right). \qquad (15)$$

Правая часть соотношения (15) распадается в произведение множителей, один из которых зависит от n, а второй – от m, следовательно, случайные величины $\nu\left(t\right)$ и $\nu\left(t+s\right)-\nu\left(t\right)$ независимы, причем $\nu\left(t+s\right)-\nu\left(t\right)\stackrel{d}{=}\nu\left(s\right)$ (это следует из (15) путем суммирования по всем $n\in\mathbb{N}_0$). Теорема доказана.

Определение 5. Говорят, что случайный процесс $\{X\left(t\right),\ t\geq 0\}$ имеет *независимые приращения*, если для произвольных моментов времени $0<t_1<t_2<\ldots<t_m$, $m\in\mathbb{N}$**,** случайные величины $X\left(t_1\right)-X\left(0\right), X\left(t_2\right)-X\left(t_1\right),\ldots,X\left(t_m\right)-X\left(t_{m-1}\right)$ независимы.

Процессы с независимыми приращениями играют важную роль в теории случайных процессов. Отметим, что и случайные блуждания, и процесс Пуассона имеют независимые приращения (это установлено нами для двух моментов времени и может быть аналогичным образом доказано для произвольного числа моментов времени).

Данное ранее определение 4 называется *конструктивным определением* процесса Пуассона. В связи с теоремой 3 и ее упомянутым обобщением можно дать *общее определение* процесса Пуассона.

Определение 6. Случайный процесс $\{X\left(t\right),\ t\geq 0\}$ называется *процессом Пуассона с интенсивностью* $\lambda>0$, если

1) $X\left(0\right)=0$;

2) процесс $\{X\left(t\right)\}$ имеет независимые приращения;

3) $X\left(t_2\right)-X\left(t_1\right)\sim\Pi_{\lambda\left(t_2-t_1\right)}$ для произвольных моментов времени $0\leq t_1<t_2$.