Лекция 14

Стационарные в широком смысле последовательности

Рассмотрим класс случайных последовательностей $\{\xi_n\}$, обобщающих стационарные последовательности, при этом предположим, что временная переменная n принимает значения из $\mathbb{Z}$ (множество целых чисел) и что случайные величины ξ_n принимают значения из $\mathbb{C}$ (множество комплексных чисел).

Определение 1. Случайная последовательность ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, называется *стационарной в широком смысле*, если $\mathbf{E}\,|\xi_n|^2 < +\infty$ при каждом $n \in \mathbb{Z}$ и для произвольных $n, m \in \mathbb{Z}$ величины $\mathbf{E}\xi_n$ и $\mathbf{E}\xi_n\overline{\xi_m}$ не меняются при произвольном временном сдвиге $r \in \mathbb{Z}$, т.е. $\mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\xi_{n+r}$, $\mathbf{E}\xi_n\overline{\xi_m} = \mathbf{E}\xi_{n+r}\overline{\xi_{m+r}}$.

Очевидно, что если $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ – стационарная последовательность и при этом $\mathbf{E}\,|\xi_n|^2 < +\infty$ при любом $n \in \mathbb{Z}$, то эта последовательность является стационарной в широком смысле.

Ковариационной функцией произвольной случайной последовательности $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ называется комплекснозначная функция

$$R\,(n,m) = \mathbf{E}\,(\xi_n - \mathbf{E}\xi_n)\left(\overline{\xi_m - \mathbf{E}\xi_m}\right), \qquad n, m \in \mathbb{Z}.$$

В случае, когда случайная последовательность $\{\xi_n\}$ является стационарной в широком смысле, функция $R\,(n,m)$ зависит на самом деле только от разности $n-m$ и поэтому вместо $R\,(n,m)$ будем писать $R\,(n-m)$.

Произвольная случайная последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ называется *центрированной*, если $\mathbf{E}\xi_n = 0$ при каждом $n \in \mathbb{Z}$. Если $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ – центрированная и стационарная в широком смысле последовательность, то при всех $n, r \in \mathbb{Z}$

$$R\,(n) = \mathbf{E}\xi_n\overline{\xi_0} = \mathbf{E}\xi_{n+r}\overline{\xi_r}.$$

Наоборот, если при всех $n, r \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{E}\xi_n = 0, \qquad \mathbf{E}\xi_{n+r}\overline{\xi_r} = \mathbf{E}\xi_n\overline{\xi_0} \in \mathbb{C},$$

то случайная последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ является центрированной и стационарной в широком смысле.

В дальнейшем рассматриваются только такие стационарные в широком смысле последовательности, которые являются центрированными.

Ковариационная функция стационарной в широком смысле последовательности является *неотрицательно определенной*, т.е. для произвольного $m \in \mathbb{N}$, произвольных моментов времени $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{Z}$ и произвольных чисел $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k,l=1}^{m} z_k \overline{z_l} R\,(n_k - n_l) \geq 0. \tag{1}$$

Действительно,

$$\sum_{k,l=1}^{m} z_k \overline{z_l} R\,(n_k - n_l) = \sum_{k,l=1}^{m} z_k \overline{z_l}\mathbf{E}\xi_{n_k}\overline{\xi_{n_l}} = \mathbf{E}\sum_{k,l=1}^{m} z_k \overline{z_l}\xi_{n_k}\overline{\xi_{n_l}} =$$

$$= \mathbf{E} \sum_{k,l=1}^{m} z_k \xi_{n_k} \overline{z_l \xi_{n_l}} = \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^{m} z_k \xi_{n_k} \right) \left(\sum_{l=1}^{m} \overline{z_l \xi_{n_l}} \right) =$$

$$= \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^{m} z_k \xi_{n_k} \right) \overline{\left(\sum_{l=1}^{m} z_l \xi_{n_l} \right)} = \mathbf{E} \left| \sum_{k=1}^{m} z_k \xi_{n_k} \right|^2 \geq 0.$$

Легко проверяется, что $R(0) \geq 0$, причем равенство возможно лишь в случае, когда $\xi_0 = 0$ п.н., который исключается из рассмотрения. Кроме того, $R(-n) = \overline{R(n)}$, $|R(n)| \leq R(0)$ при $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что последние три свойства можно вывести из (1).

Пример 1. Пусть η – произвольная комплекснозначная случайная величина такая, что $\mathbf{E}\eta = 0$ и $\mathbf{E}|\eta|^2 = \sigma^2$. Положим при фиксированном $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\xi_n = e^{i\lambda n}\eta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Случайная последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ является центрированной стационарной в широком смысле с ковариационной функцией

$$R(n) = \sigma^2 e^{i\lambda n}.$$

Действительно, $\mathbf{E}\xi_n = 0$ и

$$\mathbf{E}\xi_{n+r}\overline{\xi_r} = \mathbf{E}e^{i\lambda(n+r)}\eta\overline{e^{i\lambda r}\eta} = e^{i\lambda n}\mathbf{E}|\eta|^2 = \sigma^2 e^{i\lambda n},$$

где $n, r \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Рассмотренный пример можно обобщить. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $\eta_1, \ldots, \eta_N$ – попарно некоррелированные случайные величины (это означает, что $\mathbf{E}\eta_k\overline{\eta_l} = 0$ при $k \neq l$, $k, l \in \{1, \ldots, N\}$), причем $\mathbf{E}\eta_k = 0$ и $\mathbf{E}|\eta_k|^2 = \sigma_k^2 > 0$ при $k \in \{1, \ldots, N\}$. Положим при фиксированных действительных числах $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{N} e^{i\lambda_k n}\eta_k, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Случайная последовательность $\{\xi_n\}$ является (докажите сами) центрированной стационарной в широком смысле с ковариационной функцией

$$R(n) = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 e^{i\lambda_k n}.$$

Заметим, что в силу 2π-периодичности по λ функции $\exp(i\lambda n)$ можно считать, что все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ принадлежат промежутку $(-\pi, \pi]$.

Интересно отметить, что в общем случае ковариационная функция стационарной в широком смысле последовательности имеет вид, аналогичный полученному в примере 2.

Теорема 1 (Герглотц). *Пусть комплекснозначная функция $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, является неотрицательно определенной. Тогда существует такая вероятностная мера μ на измеримом пространстве $([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]))$, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$*

$$R(n) = R(0) \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n}\mu(d\lambda).$$

Доказательство. Положим при $N \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in [-\pi, \pi]$

$$f_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{k,l=1}^{N} \frac{R(k-l)}{R(0)} e^{-i\lambda(k-l)}.$$

Поскольку функция $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, является неотрицательно определенной, то $f_N(\lambda) \geq 0$ при $N \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Число слагаемых в этой двойной сумме, у которых $k - l = m$, равно $N - |m|$, поэтому

$$f_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \frac{R(m)}{R(0)} e^{-i\lambda m}.$$

Для каждого $N \in \mathbb{N}$ введем на измеримом пространстве $([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]))$ меру μ_N по формуле

$$\mu_N(A) = \int_A f_N(\lambda)\, d\lambda,\ A \in \mathcal{B}([-\pi, \pi]).$$

Известно, что при $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-m)} d\lambda = \begin{cases} 0,\ m \neq n; \\ 2\pi,\ m = n. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n} \mu_N(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f_N(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \frac{R(n)}{R(0)}, & |n| < N; \\ 0, & |n| \geq N. \end{cases} \tag{2}$$

Из (2) при $n = 0$ видно, что все меры μ_N, $N \in \mathbb{N}$, являются вероятностными.

По мере μ_N найдем функцию распределения

$$F_N(x) := \int_{-\pi}^{x} f_N(\lambda)\, d\lambda,\ x \in [-\pi, \pi].$$

Функция распределения F_N сосредоточена на отрезке $[-\pi, \pi]$. По первой теореме Хелли из всякой последовательности функций распределения, сосредоточенных на некотором фиксированном отрезке, можно извлечь подпоследовательность сходящуюся в основном к функции распределения, сосредоточенной на том же отрезке. Следовательно, существует подпоследовательность $\{N_k\}$ последовательности натуральных чисел и функция распределения $F(\cdot)$, сосредоточенная на отрезке $[-\pi, \pi]$, такая что

$$\lim_{k \to \infty} F_{N_k}(x) = F(x) \tag{3}$$

для всех точек $x \in [-\pi, \pi]$, которые являются точками непрерывности функции $F(\cdot)$.

Функция распределения F задает меру μ на измеримом пространстве $([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]))$ по формуле

$$\mu(A) = \int_A dF(x), \ A \in \mathcal{B}([-\pi, \pi]).$$

Известно, что сходимость функций распределения в основном равносильна сходимости по распределению. А это означает, что при $n \in \mathbb{Z}$ для непрерывной и ограниченной функции $g_n(\lambda) = e^{i\lambda n}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n} \mu_{N_k}(d\lambda) = \int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n} \mu(d\lambda). \tag{4}$$

В силу соотношения (2)

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n} \mu_{N_k}(d\lambda) = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{|n|}{N_k}\right) \frac{R(n)}{R(0)} = \frac{R(n)}{R(0)}. \tag{5}$$

Из соотношений (4) и (5) следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Поскольку $\exp(-i\pi n) = \exp(i\pi n)$ при $n \in \mathbb{Z}$, можно считать, что мера μ сосредоточена на промежутке $(-\pi, \pi]$. Поэтому интегрировать можно по этому промежутку, а не по отрезку $[-\pi, \pi]$.

Теорема 2 (Хинчин)**.** *Комплекснозначная функция* $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, *является ковариационной функцией некоторой центрированной стационарной в широком смысле последовательности тогда и только тогда, когда существует такая вероятностная мера* μ *на измеримом пространстве* $([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]))$, *что справедливо представление*

$$R(n) = R(0) \int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n} \mu(d\lambda). \tag{6}$$

Доказательство. Если функция $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, является ковариационной функцией некоторой центрированной стационарной в широком смысле последовательности, то она является неотрицательно определенной и представление (6) справедливо в силу теоремы 1.

Пусть справедливо представление (6). Мера μ задает функцию распределения

$$F(x) = \mu([-\pi, x]), \ x \in [-\pi, \pi].$$

Пусть ξ – случайная величина со значениями в промежутке $[-\pi, \pi]$ и функцией распределения F, а η – случайная величина, равномерно распределенная на $[-\pi, \pi]$, причем ξ и η независимы. Рассмотрим случайную последовательность

$$\xi_n = \sqrt{R(0)} e^{i(n\xi + \eta)}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что при $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{E}\xi_n = \frac{\sqrt{R(0)}}{2\pi} \iint_{[-\pi,\pi]^2} e^{i(nx+y)} dF(x)\, dy =$$

$$= \frac{\sqrt{R(0)}}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{inx} dF(x) \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{iy} dy = 0,$$

поскольку последний интеграл равен 0. Далее, при $n, r \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{E}\xi_{n+r}\overline{\xi_r} = \frac{R(0)}{2\pi} \iint\limits_{[-\pi,\pi]^2} e^{i((n+r)x+y)} e^{-i(rx+y)} dF(x)\, dy =$$

$$= \frac{R(0)}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{inx} dF(x) \int\limits_{-\pi}^{\pi} dy = R(0) \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{inx} dF(x) = R(n).$$

Таким образом, $\{\xi_n\}$ – центрированная стационарная в широком смысле последовательность с ковариационной функцией $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Теорема доказана.

Замечание 2. Вместо меры μ часто рассматривают *спектральную меру* $\mu^* = R(0)\,\mu$, поэтому вместо (6) запишем: при $n \in \mathbb{Z}$

$$R(n) = \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n} \mu^*(d\lambda). \tag{7}$$

Функцию распределения спектральной меры, т.е. функцию

$$F^*(x) = \mu^*([-\pi, x]),\ x \in [-\pi, \pi],$$

называют *спектральной функцией*.

Задача. Доказать, что спектральная мера однозначно определяется по ковариационной функции.

Пример 3. *Белым шумом* называется случайная последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, состоящая из попарно некоррелированных случайных величин, причем $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $\mathbf{E}|\xi_n|^2 = 1$ при $n \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что $\{\xi_n\}$ является центрированной и стационарной в широком смысле последовательностью с ковариационной функцией

$$R(0) = 1,\ R(n) = 0,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Эту функцию можно представить в виде

$$R(n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \frac{1}{2\pi} d\lambda.$$

Таким образом (см. (7)), спектральная мера является равномерной на промежутке $[-\pi, \pi]$, что и объясняет название последовательности $\{\xi_n\}$.

Установим закон больших чисел для стационарной в широком смысле последовательности $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Положим при $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k.$$

Теорема 3 (Хинчин). Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ – *центрированная и стационарная в широком смысле последовательность. Тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n} \overset{\text{ср. кв.}}{\to} \eta, \tag{8}$$

где η – *некоторая случайная величина, такая что* $\mathbf{E}\eta = 0$ *и* $\mathbf{E}\left|\eta\right|^2 < +\infty$.

Доказательство. Покажем, что

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m}\right|^2 = 0 \tag{9}$$

(это означает, что выполнен критерий Коши для сходимости в среднем квадратическом). Поскольку

$$\mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m}\right|^2 = \mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n}\right|^2 - \mathbf{E}\frac{S_n}{n}\frac{\overline{S_m}}{m} - \mathbf{E}\frac{S_m}{m}\frac{\overline{S_n}}{n} + \mathbf{E}\left|\frac{S_m}{m}\right|^2,$$

для справедливости (9) достаточно показать, что существует

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{E}\frac{S_n}{n}\frac{\overline{S_m}}{m} := c, \tag{10}$$

где c – некоторое число. Заметим, что

$$\mathbf{E}\frac{S_n}{n}\frac{\overline{S_m}}{m} = \frac{1}{nm}\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\right)\left(\sum_{l=0}^{m-1}\overline{\xi_l}\right) = \frac{1}{nm}\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}\xi_k\overline{\xi_l}\right) =$$

$$= \frac{1}{nm}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}\mathbf{E}\xi_k\overline{\xi_l} = \frac{1}{nm}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}R\left(k-l\right). \tag{11}$$

Ввиду соотношения (7)

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}R\left(k-l\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}\int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda(k-l)}\mu^*\left(d\lambda\right) =$$

$$= \int\limits_{[-\pi,\pi]}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}e^{i\lambda(k-l)}\right)\mu^*\left(d\lambda\right). \tag{12}$$

Положим

$$h_{n,m}\left(\lambda\right) = \frac{1}{nm}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}e^{i\lambda(k-l)}.$$

Из соотношений (11) и (12) находим, что

$$\mathbf{E}\frac{S_n}{n}\frac{\overline{S_m}}{m} = \int\limits_{[-\pi,\pi]} h_{n,m}\left(\lambda\right)\mu^*\left(d\lambda\right) =$$

$$= \int\limits_{\{0\}} h_{n,m}(\lambda)\, \mu^*(d\lambda) + \int\limits_{[-\pi,0)\cup(0,\pi]} h_{n,m}(\lambda)\, \mu^*(d\lambda). \tag{13}$$

Поскольку $h_{n,m}(0) = 1$, то

$$\int\limits_{\{0\}} h_{n,m}(\lambda)\, \mu^*(d\lambda) = \mu^*(\{0\}). \tag{14}$$

Далее, при $\lambda \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$

$$h_{n,m}(\lambda) = \frac{e^{i\lambda n} - 1}{n\left(e^{i\lambda} - 1\right)} \frac{e^{-i\lambda m} - 1}{m\left(e^{i\lambda} - 1\right)}.$$

Ясно, что при фиксированном $\lambda \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ последовательность $h_{n,m}(\lambda)$ ограничена по n и m и стремится к 0 при $n, m \to \infty$. Следовательно, по теореме о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n,m\to\infty} \int\limits_{[-\pi,0)\cup(0,\pi]} h_{n,m}(\lambda)\, \mu^*(d\lambda) = 0. \tag{15}$$

Из соотношений (13)-(15) вытекает, что

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{E} \frac{S_n}{n} \overline{\frac{S_m}{m}} = \mu^*(\{0\}),$$

т.е. соотношение (10) справедливо при $c = \mu^*(\{0\})$. Значит, справедливо соотношение (9). Откуда, учитывая полноту пространства L^2, получаем (8), причем $\mathbf{E}\,|\eta|^2 < +\infty$. Наконец, учитывая, что из сходимости в L^2 следует сходимость в L^1, т.е. $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,|S_n/n - \eta| = 0$, находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \frac{S_n}{n} = \mathbf{E}\eta. \tag{16}$$

Поскольку

$$\mathbf{E} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}\xi_k = 0,$$

то из (16) следует, что $\mathbf{E}\eta = 0$. Теорема доказана.