**Большие уклонения рекуррентной последовательности**

**Теорема 9.1.** Пусть $S_n$ нерешетчаты. Тогда

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \in \Delta_n[x)) = \frac{\Delta_n I(x/n)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)\right),\ n \to \infty,$$

при всех $\Delta_n$ достаточно медленно стремящихся к 0 равномерно по $x/n \in K'$ для любого компактного подмножества $K' \subset D$, где

$$D = \begin{cases} (\mu, m^+), & \mu > 0, \\ (0, m^+), & \mu = 0, \\ (\gamma, m^+), & \mu < 0. \end{cases} \quad I\left(h_{\frac{x}{n}}\right) = \mathbf{E}Y^{h_{x/n}},\ Y = Y_0 + \sum_{i=0}^{\infty} B_i^{(h_{x/n})} e^{-S_{i+1}^{(h_{x/n})}}.$$

Здесь $B_{i-1}^{(h_{x/n})}, \xi_i^{(h_{x/n})}$, $i \geq 1$ — н.о.р векторы с распределением

$$\mathbf{P}(B^{(h)} \in A, \xi^{(h)} \in C) = R(h)^{-1} \int_C e^{hx} \mathbf{P}(B \in A, \xi \in dx).$$

**Замечание**. Предел

$$I(h) = \lim_{m \to \infty} \mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{m} B_i^{(h)} e^{-S_{i+1}^{(h)}}\right)^h$$

существует и равномерен по $h \in [\delta, \tilde{h}]$ при любых $0 < \delta < \tilde{h} < h^+$. Для доказательства заметим, что при $h \geq 1$ в силу неравенства Минковского

$$\left(\mathbf{E}\left(\sum_{i=m}^{n} B_i^{(h)} e^{-S_{i+1}^{(h)}}\right)^h\right)^{1/h} \leq \sum_{i=m}^{n}\left(\mathbf{E}\left(B_i^{(h)} e^{-S_{i+1}^{(h)}}\right)^h\right)^{1/h} = \sum_{i=m}^{n} \frac{\left(\mathbf{E}B_i^h\right)^{1/h}}{R(h)^{i/h}} \leq \left(\mathbf{E}B_1^h\right)^{1/h} \frac{R(h)^{n/h}}{1 - R^{-1/h}(h)} < \varepsilon,$$

откуда рассматриваемая последовательность сходится в $L^h$ равномерно по $h \in [1, \tilde{h}]$. Рассуждения при $h \in [0,1]$ аналогичны, но используют неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^h \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^h.$$

**Доказательство Теоремы 9.1.** Доказательство оценки сверху было проведено на прошлой лекции, проведем оценку снизу.

Аналогично 1) имеем для искомой вероятности оценку снизу

$$\mathbf{P}\left(\ln\left(\sum_{i=0}^{[n^\alpha]} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right) \in [x + \ln\delta_n, x + \Delta_n - \ln\delta_n)\right) - \mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right| \geq \delta_n \exp(x)\right),$$

причем в силу 1.1) вторая величина мала. Тем самым, нам достаточно оценить вероятность

$$\mathbf{P}\left(\ln\left(\sum_{i=0}^{[n^\alpha]} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right) \in [x, x + \Delta_n)\right).$$

Оценим ее снизу интегралом

$$\int_{n^\alpha x/n - n^{3/7}}^{n^\alpha x/n - n^{3/7}} \mathbf{P}(\ln Y_{[n^\alpha]} \in dy) \mathbf{P}(S_n - S_{[n^\alpha]} \in [x, x + \Delta_n)).$$

В силу произведенных ранее оценок этот интеграл эквиваленен

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x + \Delta_n)) R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]} \int_{n^\alpha x/n - n^{3/7}}^{n^\alpha x/n + n^{3/7}} e^{h_{x/n}} \mathbf{P}(\ln Y_{[n^\alpha]} \in dy),$$

где члены второго порядка при разложении $\Lambda$ в ряд Тейлора мы отбросили, поскольку $(y - xn^{\alpha-1})^2 = o(n)$. Остается показать, что

$$R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]} \int_{n^\alpha x/n + n^{3/7}}^{\infty} e^{h_{x/n} y} \mathbf{P}(\ln(Y_{[n^\alpha]} \in dy),\ R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]} \int_{-\infty}^{n^\alpha x/n - n^{3/7}} e^{h_{x/n} y} \mathbf{P}(\ln(Y_{[n^\alpha]} \in dy) \tag{1}$$

есть $o(1)$ при $n \to \infty$. Сделаем это только при $h > \tilde{\varepsilon}$. Для этого заметим, что в силу равномерной интегрируемости для любого $A_n$: $\mathbf{P}^{(h)}(A_n) \to 0$

$$\mathbf{E}^{(h)}\left|\frac{Y_n}{e^{S_n}}\right|^h I_{A_n} \to 0,\ n \to \infty,$$

равномерно по рассматриваемым $h$, поскольку при достаточно больших $k$ и $n$ и всех рассматриваемых $h$

$$\mathbf{E}^{(h)}\left|\frac{Y_n}{e^{S_n}}-\frac{Y_k}{e^{S_k}}\right|^h I_{A_n}<\varepsilon,\ R(h)^{-k}\mathbf{E}|Y_k|^h I_{A_n}<\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Отметим следующее важное наблюдение: проведенное доказательство работает в более широких чем у нас требованиях:

1. Не требуется, чтобы $B_i$ было независимо от всех $A_j$, $j\neq i$. Достаточно, чтобы $B_i$ было независимо от $A_{i+1},...,A_n$.
2. Не требуется, чтобы $B_i$ были одинаково распределены. Достаточно, чтобы при рассматриваемых $h$ выполнялось условие
$$\frac{\mathbf{E}|B_i|^h}{R(h)^i}<e^{\delta hi}$$
при некоторых $C$, $\delta$ и всех $i$.
3. Кроме того, потребуется наложить условие
$$Y_n e^{-S_n}\overset{\mathbf{P}^{(h)}}{\to} Y$$
при всех рассматриваемых $h$ и некоторой $Y$ для того, чтобы предел в определении $I$ существовал.
4. При любом $\varepsilon>0$ найдутся такие $l$, $I>0$, что при любой последовательности $h_n\to 0$ и всех $k>l$
$$\limsup_{n\to\infty}\left|\mathbf{E}^{(h_n)}(Y_k^+e^{-S_k})^{h_n}-I\right|<\varepsilon.$$
5. При любом $\varepsilon>0$ найдутся такие $l$, $I>0$, что при любой последовательности $h_n\to 0$ и всех $k>l$
$$\limsup_{n\to\infty}\mathbf{E}^{(h_n)}\left(\left(Y_k^+e^{-S_k}\right)^{h_n};|\ln Y_k-m(h_n)k|>k^{5/7}\right)<\varepsilon.$$

Условий 1)-3) достаточно для равномерности асимптотики в любом отрезке из интервала $(\max(\mu,0),m^+)$, условия 4)-5) позволяют расширить интервал до полуинтервала $[\mu,m^+)$.

Обобщенная версия позволяет использовать теорему для различных моделей: ветвящихся процессов в случайной среде, функционально зависящих последовательностей и других.