Большие уклонения максимума

Теорема 8.1. Пусть S_n нерешетчаты. Тогда

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \in \Delta_n[x)) = \frac{\Delta_n I(x/n)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)\right),\ n \to \infty,$$

при всех Δ_n достаточно медленно стремящихся к 0 равномерно по $x/n \in K'$ для любого компактного подмножества $K' \subset D$, где

$$D = \begin{cases} (\mu, m^+), & \mu > 0, \\ (0, m^+), & \mu = 0, \\ (\gamma, m^+), & \mu < 0. \end{cases} \quad I\left(h_{\frac{x}{n}}\right) = \mathbf{E}Y^{h_{x/n}},\ Y = Y_0 + \sum_{i=0}^{\infty} B_i^{(h_{x/n})} e^{-S_{i+1}^{(h_{x/n})}}.$$

Здесь $B_{i-1}^{(h_{x/n})}, \xi_i^{(h_{x/n})}$, $i \geq 1$ — н.о.р векторы с распределением

$$\mathbf{P}(B^{(h)} \in A, \xi^{(h)} \in C) = R(h)^{-1} \int_C e^{hx} \mathbf{P}(B \in A, \xi \in dx).$$

Доказательство Теоремы 8.1. Заметим, что

$$Y_n = Y_0 e^{S_n} + \sum_{i=1}^{n} B_{i-1} e^{S_n - S_i}$$

Проведем оценку вероятности $\mathbf{P}(\ln Y_n \in \Delta_n[x))$ сверху и снизу.
1) Фиксируем $\alpha, \beta \in [0,1]$ и оценим рассматриваемое выражение сверху величиной

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right| \geq \delta_n \exp(x)\right) + \mathbf{P}\left(\ln\left(\sum_{i=0}^{[n^\alpha]} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right) \in [x - \ln\delta_n, x + \Delta_n + \ln\delta_n)\right), \tag{1}$$

где δ_n — некоторая последовательность, т.ч. $\ln\delta_n$ стремится к 0 быстрее чем Δ_n.
1.1) Первая вероятность в (1) оценивается сверху величиной

$$\mathbf{P}(\exists n^\alpha \leq i \leq n : S_n - S_i + \ln|B_{i-1}| \geq x + \ln\delta_n - \ln n) \leq \sum_{i=[n^\alpha]}^{n} \mathbf{P}(S_n - S_i + \ln|B_{i-1}| \geq x - n^\beta) \leq$$
$$\sum_{i=[n^\alpha]}^{n} \mathbf{E}|B_{i-1}|^h R(h)^{n-i} e^{-h(x-n^\beta)} \leq c e^{-(h_{x/n}\frac{x}{n} - \ln R(h_{x/n}))n} n e^{-\ln R(h_{x/n}) n^\alpha} e^{h_{x/n} n^\beta}$$

при $h = h_{x/n}$, любом $\beta > 0$ и δ_n, стремящихся к 0, медленнее чем e^{-n^β}. При $\alpha = 3/5$,$\beta = 1/10$, получаем что

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} B_{i-1} e^{S_n - S_i} \geq \delta_n \exp(x)\right) = o(1)\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(x/n)n}.$$

1.2) Докажем, что

$$\mathbf{P}\left(\ln\left(\sum_{i=0}^{[n^\alpha]} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right) \in [x, x + \Delta_n)\right) \leq (1+\varepsilon) I\left(\frac{x}{n}\right) \mathbf{P}(S_n \in [x, x + \Delta_n)) \tag{2}$$

при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n, причем равномерно по указанным x. Тогда верхняя оценка будет доказана, поскольку

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x + \Delta_n)) \sim \mathbf{P}(S_n \in [x - \delta_n, x + \Delta_n + \delta_n)),$$

а I непрерывная функция.
Величина в левой части (2) представима в виде

$$\mathbf{P}(\ln\left(Y_{[n^\alpha]} e^{S_{n-[n^\alpha]}}\right) \in [x, x + \Delta_n)) \leq \int_{x - \theta_2' n}^{x - \mu_0(n - n^\alpha) + \sqrt{n}} \mathbf{P}(S_{n-[n^\alpha]} \in [x - y, x + \Delta_n - y)) \mathbf{P}(\ln Y_{[n^\alpha]} \in dy) +$$
$$\mathbf{P}(S_{n-[n^\alpha]} \geq \theta_2' n) + \mathbf{P}(\ln Y_{[n^\alpha]} \geq x - \mu_0 n + \sqrt{n}) \tag{3}$$

при любом $\theta_2' \in [\theta_2, m^+)$, где $\mu_0 = \max(\mu, 0)$.
Оценим второе слагаемое (3), пользуясь неравенством Маркова с $h = h_{x/n}$,

$$\mathbf{P}(S_{n-[n^\alpha]} \geq \theta_2' n) \leq R(h)^{n - n^\alpha} e^{-h\theta_2' n} = o(1)\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(x/n)n}.$$

Аналогично оценивается третье слагаемое (3)

$$\mathbf{P}(\ln Y_{[n^\alpha]} \geq x - \mu_0(n-n^\alpha) + \sqrt{n}) \leq \mathbf{P}(\exists i : S_{[n^\alpha]-i} + \ln|B_{i-1}| \geq x - \mu_0(n-n^\alpha) + \sqrt{n} - \ln n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(S_{[n^\alpha]-i} + \ln|B_{i-1}| \geq x - \mu_0 n + \sqrt{n} - \ln n) \leq nR(h)^{n^\alpha} e^{-h_{x/n}x} e^{h_{x/n}\mu_0 n - h_{x/n}\sqrt{n}} n^h,$$

где правая часть представляет собой величину

$$e^{-\Lambda(x/n)n} e^{(\mu_0 h_{x/n} - \ln R(h_{x/n}))(n-n^\alpha)} e^{-h_{x/n}\sqrt{n}} n^{1+h_{x/n}}.$$

При этом $\ln R(h) \geq h\mu_0$ в силу выпуклости при $\mu > 0$ и в силу неравенство $R(h) \geq 1$ при $\mu \leq 0$, откуда мы получаем нужную асимптотику.
1.3) Первое слагаемое (3) оценим с помощью интегролокальной теоремы

$$\mathbf{P}(S_{n-[n^\alpha]} \in [x-y, x+\Delta_n - y)) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{(x-y)/n})} e^{-\Lambda\left(\frac{x-y}{n-n^\alpha}\right)(n-n^\alpha)}.$$

При этом

$$\Lambda\left(\frac{x-y}{n-n^\alpha}\right) = \Lambda\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{yh_{x/n}}{n-n^\alpha} + \frac{h_{x/n}xn^\alpha}{(n-n^\alpha)n} + \frac{1}{2\sigma^2(\tilde{h})}\left(\frac{y - \frac{x}{n}n^\alpha}{n-n^\alpha}\right)^2,$$

где $\tilde{h} \in [h_{x/n}, h_{(x-y)/(n-n^\alpha)}]$, а значит

$$\Lambda\left(\frac{x-y}{n-n^\alpha}\right)(n-n^\alpha) = \Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n - yh_{x/n} + \ln R(h_{x/n})n^\alpha + \frac{1}{2\sigma^2(\tilde{h})}\frac{\left(y - \frac{x}{n}n^\alpha\right)^2}{n-n^\alpha}.$$

Разобьем интегрирование в (3) на участки $\left|y - \frac{x}{n}n^\alpha\right| \leq n^{2/3}$ и $\left|y - \frac{x}{n}n^\alpha\right| > n^{2/3}$. Интеграл по второй части не превосходит

$$\frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\inf_{[0,h_2]}\sigma(h)} e^{-\frac{n^{1/3}}{2\sup_{[0,h_2]}\sigma^2(h)}} R(h_{x/n})^{-n^\alpha} \mathbf{E}Y_{[n^\alpha]}^{h_{x/n}},$$

то есть мал по сравнению с $\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n))$, поскольку

$$I(h) = \limsup_{m\to\infty} R(h)^{-m}\mathbf{E}Y_m^h \leq c_1 < \infty.$$

1.4) Итак, остается оценить первое слагаемое (3) при интегрировании в диапазоне $\left|y - \frac{x}{n}n^\alpha\right| \leq n^{2/3}$. В нем $\tilde{h} = h_{x/n} + o(1)$, откуда наше слагаемое оценивается сверху величиной

$$\frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n} R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}(\ln Y_{[n^\alpha]} \in dy) e^{h_{x/n}y} \sim R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]} \mathbf{E}\left(Y_{[n^\alpha]}^+\right)^{h_{x/n}} \mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)).$$

Остается показать, что

$$R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]} \mathbf{E}\left(Y_{[n^\alpha]}^+\right)^{h_{x/n}} \sim I(h_{x/n}),$$

что будет сделано на следующей лекции.