Большие уклонения максимума

Продолжим доказательство теоремы о больших уклонениях максимума.

Теорема 6.1.

1) Пусть $\mu > 0$. Тогда соотношение

$$\mathbf{P}(M_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} \exp(-\Lambda(k/n)n)\mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/n})} > 0, i > 0\right) \sum_{i=0}^{\infty} P(S_j \le 0, j \le i) R(h_{k/n})^{-i} \quad (1)$$

выполнено равномерно по $k/n \in [\mu, m_2] \subset [\mu, m^+)$ при $n \to \infty$.

2) Пусть $\mu = 0$. Тогда (4) выполнено равномерно по $k/n \in [m_1, m_2] \subset (\mu, m^+)$ при $n \to \infty$.

3) Пусть $\mu < 0$. Тогда (4) выполнено равномерно по $k/n \in [m_1, m_2] \subset (\gamma, m^+)$ при $n \to \infty$, где $\gamma = m(\varkappa)$, $\varkappa > 0 : R(\varkappa) = 1$.

Доказательство Теоремы 6.1. На прошлом занятии мы доказали Лемму

Лемма 6.1. Пусть $\tau_M = \min\{i : S_i = M_n\}$. Тогда

$$\mathbf{P}(M_n = k, \tau_M = l) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi l}\sigma(h_{k/l})} e^{-\Lambda\left(\frac{k}{l}\right)} \mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i > 0\right) \mathbf{P}(S_j \le 0, j \le n - l)$$

равномерно по k, l, таким что

$$\frac{k}{l} \in \begin{cases} [\theta_1, \theta_2] \subset [\mu, m^+), & \text{при } \mu > 0, \\ [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+), & \text{при } \mu = 0, \\ [\theta_1, \theta_2] \subset [\gamma, m^+), & \text{при } \mu < 0. \end{cases}$$

Отметим, что мы доказали ее при θ_1 отделенных от μ и γ, поскольку по существу пользовались тем, что $R(h)$ отделено от 1. Обсудим доказательство в случае $\theta_1 = \mu$ или $\theta_1 = \gamma$. В этом случае будем повторять доказательство с прошлой лекции, но с несколькими изменениями:

- При оценке вероятности $\mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le a_l, \exists j > a_l : S_j \le 0 | S_l = k)$ будем использовать более тонкую оценку. Как и прежде перейдем к неравенству
$$\sum_{j=a_l}^{l} \mathbf{P}(S_{l-j} \ge k) \le \sum_{j=a_l}^{l} R(h)^{l-j} e^{-hk}.$$
В качестве a_l рассмотрим $[l^{7/11}]$, в качестве $h = h_{k/l} + l^{-2/5}$, тогда
$$hk - (l-j)\ln R(h) = h_{k/l}k + kl^{-2/5} - (l-j)(\ln R(h_{k/l}) + m(h_{k/l})l^{-2/5} + \sigma^2(\tilde{h})l^{-4/5}) \ge$$
$$\Lambda\left(\frac{k}{l}\right) + jkl^{-7/5} + j\ln R(h_{k/l}) - \sigma^2(\tilde{h})l^{1/5},$$
где $\tilde{h} \in [h_{k/l}, h_{k/l} + l^{-2/5}]$. В силу приведенных оценок
$$R(h)^{l-j}e^{-hk} \le R(h_{k/l})^{-j} e^{-\Lambda\left(\frac{k}{l}\right)l} e^{jkl^{-7/5} - \sigma^2(\tilde{h})l^{1/5}},$$
следовательно,
$$\sum_{j=a_l}^{l} R(h)^{l-j}e^{-hk} \le le^{-\Lambda\left(\frac{k}{l}\right)l} \exp\left(a_l kl^{-7/5} - \sigma^2(\tilde{h})l^{1/5}\right) R(h_{k/l})^{-a_l}.$$
Эта величина есть $o(1)l^{-1/2}e^{-\Lambda(k/l)l}$, поскольку $\sigma^2()$ ограничены некоторой константой $\tilde{\sigma}$, откуда $a_l kl^{-7/5} \ge \max(\mu, \gamma)l^{7/11-2/5}$, $\sigma^2(\tilde{h})l^{1/5} \le \tilde{\sigma}^2 l^{1/5}$, где $7/11 > 3/5$.

- Также изменится в этом случае оценка для вероятностей
$$\mathbf{P}(S_i > 0, i \le a_l, S_{a_l} \in I, S_l = k),$$
где используем $I = [a_l k/l - l^{5/12}, a_l k/l + l^{5/12}]$. В этом случае при $m \in I$ оценим вероятность
$$\mathbf{P}(S_{l-a_l} = k - m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi(l-a_l)}\sigma(h_{(k-m)/(l-a_l)})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{k-m}{l-a_l}\right)(l-a_l)\right).$$
Как и прежде $l - a_l \sim l$, $\sigma(h_{(k-m)/(l-a_l)}) \sim \sigma(h_{k/l})$,
$$\Lambda\left(\frac{k-m}{l-a_l}\right)(l-a_l) = \Lambda\left(\frac{k}{l}\right)l + h_{k/l}\frac{ka_l - ml}{l} + \sigma^2(\tilde{h})\frac{(ka_l - ml)^2}{2l^2(l-a_l)}.$$
При этом при $m \in I$
$$(ka_l - ml)^2 \le l^{17/6} = o(l^3),$$
и последнее слагаемое есть $o(1)$. Остальные оценки аналогичны оценкам, приведенным в Лемме.

Итак, Лемма 1 справедлива и в случаях $\theta_1 = \mu$ при $\mu > 0$ или $\theta_1 = \gamma$ при $\mu < 0$. Более того, в силу тех же оценок она равномерна по $\theta_1 \in [\mu - tn^{-1/2}, \theta_2]$ и $\gamma - tn^{-4/7}$ при любом t, соответственно.

Для получения основной теоремы, воспользуемся представлением

$$\mathbf{P}(M_n = k) = \sum_{l=0}^{n} \mathbf{P}(M_n = k, \tau_M = l). \tag{2}$$

Фиксируем $m_2' \in [m_2, m^+)$, t и разобьем сумму (2) на две части: $l \in [1, n - \sqrt[3]{n}]$, $l \in [n - \sqrt[3]{n}, n]$.

1) Первая часть при любом $h \in [0, h^+)$ оценивается сверху величиной

$$\sum_{l=0}^{k/m_2'} \mathbf{P}(S_l = k) \le \sum_{l=0}^{n-\sqrt[3]{n}} R(h)^l e^{-hk} = \frac{k}{m_2'} R(h)^{n-\sqrt[3]{n}} e^{-hk}.$$

Полагая $h = h_{k/n}$ мы получаем для этой величины оценку сверху

$$\frac{k}{m_2'} e^{-\left(\frac{k}{n} h_{k/n} - \ln R(h_{k/n})\right)n} R(h_{k/n})^{-\sqrt[3]{n}} = o(1) e^{-\Lambda(k/n)n} n^{-1/2}.$$

2) Во второй части (2) воспользуемся асимптотикой из Леммы 1:

$$\mathbf{P}(S_l = k, \tau_M = l) \sim \mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i > 0\right) \mathbf{P}(S_i \le 0,\ i \le n - l) \frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sigma(h_{k/l})} e^{-\Lambda\left(\frac{k}{l}\right)l}.$$

При этом из разложения в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\Lambda\left(\frac{k}{l}\right) l = \Lambda\left(\frac{k}{n}\right) l + \frac{k(n-l)}{n} h_{k/n} + \frac{1}{2\sigma^2(h)} \frac{k^2(n-l)^2}{n^2 l} = \Lambda\left(\frac{k}{n}\right) n + (n-l)\ln R(h_{k/n}) + \frac{1}{2\sigma^2(h)} \frac{k^2(n-l)^2}{n^2 l}$$

при некотором $h \in [h_{k/n}, h_{k/(n-\sqrt[3]{n}}]$

$$\sum_{l=n-\sqrt[3]{n}}^{n} \mathbf{P}(S_l = k, \tau_M = l) \sim \frac{e^{-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right)n}}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{l=0}^{\sqrt[3]{n}} \frac{1}{\sigma(h_{k/(n-l)})} \mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/(n-l)})} > 0, i > 0\right) \mathbf{P}(S_i \le 0,\ i \le l) R(h_{k/n})^{-l} e^{-\frac{k^2 l^2}{2\sigma^2\left(h_{k/n}\right)n^3}}.$$

Последний множитель в слагаемых правой части равномерно мал по рассматриваемых k, l, а $\sigma(h_{\frac{k}{n-l}})$, $\mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/(n-l)})} > 0, i > 0\right)$ эквивалентны аналогичным выражениям без l. Тем самым, соответствующая часть (2), эквивалентна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} \exp(-\Lambda(k/n)n) \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_l^{(h_{k/n})} > 0, i > 0\right) P(S_i \le 0, i \le l) R(h_{k/n})^{-l}. \tag{3}$$

Совершенно аналогично может быть получена интегролокальная теорема в нерешетчатом случае:

$$\mathbf{P}(M_n \in [x, x + \Delta_n)) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp(-\Lambda(x/n)n) \mathbf{P}\left(S_i^{(h_{x/n})} > 0, i > 0\right) \sum_{i=0}^{\infty} P(S_j \le 0, j \le i) R(h_{x/n})^{-i}. \tag{4}$$

в тех же условиях, что и в основной теореме.

Несколько другой вид приобретает этот результат в том случае, когда мы рассматриваем случай $\mu < 0$, $k < \gamma n$.

Теорема 6.2.

Пусть $\mu < 0$. Тогда соотношение

$$\mathbf{P}(M_n = k) \sim \frac{\exp(-\varkappa k)}{\varkappa\gamma} \mathbf{P}\left(S_i^{(\varkappa)} > 0, i > 0\right) \mathbf{P}(S_j \le 0, j > 0) \tag{5}$$

выполнено равномерно по $k/n \in [m_1, m_2] \subset (0, \gamma)$ при $n \to \infty$, где $\gamma = m(\varkappa)$, $\varkappa > 0 : R(\varkappa) = 1$.

Доказательство Теоремы 6.2.

Как и прежде представим искомую вероятность в виде

$$\sum_{l=1}^{n} \mathbf{P}(M_n = k, \tau_M = l). \tag{6}$$

1) Фиксируем t и рассмотрим $l \in [k/\gamma - n^{4/7}, k/\gamma + n^{4/7}]$. В этом случае в силу Леммы 1

$$\mathbf{P}(M_n = k, \tau_M = l) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi l}\sigma(h_{k/l})} e^{-\Lambda\left(\frac{k}{l}\right)} \mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i > 0\right) \mathbf{P}(S_j \le 0, j \le n - l) \sim$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi l}\sigma(\varkappa)} e^{-\Lambda\left(\frac{k}{l}\right)} \mathbf{P}\left(S_i^{(\varkappa)} > 0, i > 0\right) \mathbf{P}(S_j \le 0, j \le n - l),$$

причем
$$\Lambda\left(\frac{k}{l}\right)=\Lambda(\gamma)+\left(\frac{k}{l}-\gamma\right)h_\gamma+\frac{\left(\frac{k}{l}-\gamma\right)^2}{2\sigma^2(h)}=\frac{k\varkappa}{l}+\frac{(k-l\gamma)^2}{2l^2\sigma^2(h)}$$
при некотором $h\in[\varkappa,k/l]$. Следовательно,
$$\sum_{l=\frac{k}{\gamma}-n^{4/7}}^{\frac{k}{\gamma}+n^{4/7}}\mathbf{P}(M_n=k,\tau_M=l)=\frac{\exp(-\varkappa k)}{\sqrt{2\pi l}\sigma(\varkappa)}\mathbf{P}\left(S_i^{(\varkappa)}>0,i>0\right)\mathbf{P}(S_j\le 0,j\le n-l)\sum_{l=\frac{k}{\gamma}-n^{4/7}}^{\frac{k}{\gamma}+n^{4/7}}e^{-\frac{(k-l\gamma)^2}{2l\sigma^2(h)}}.$$
При этом
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{l=\frac{k}{\gamma}-n^{4/7}}^{\frac{k}{\gamma}+n^{4/7}}\frac{1}{\sqrt{l}}e^{-\frac{(k-l\gamma)^2}{2l\sigma^2(h)}}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\gamma^2x^2}{2\sigma^2(\varkappa)}}dx=\frac{\sigma(\varkappa)}{\gamma}.$$
Строго говоря, это не совсем интегральная сумма для описанного интеграла (поскольку он несобственный), но можно считать, что левая часть выражения представляет собой интеграл от кусочно-постоянной функции, монотонно сходящейся к
$$\exp\left(-\frac{\gamma^2x^2}{2\sigma^2(\varkappa)}\right).$$
2) Рассмотрим $l\le\gamma^{-1}k-n^{4/7}$. Тогда
$$\mathbf{P}(S_l=k)\le\mathbf{P}(S_l\ge k)\le\frac{R(h)^l}{e^{hk}}.$$
Положим $h=\varkappa+n^{-3/7}$, тогда
$$\ln R(h)=\ln R(\varkappa)+n^{-3/7}\gamma+\frac{1}{2}n^{-6/7}\sigma^2(\tilde{h}),$$
при некотором $\tilde{h}\in[\varkappa,\varkappa+n^{-3/7}]$, откуда
$$\mathbf{P}(S_l=k)=e^{-\varkappa k}e^{n^{-3/7}(l\gamma-k)}e^{\frac{l\sigma^2(\tilde{h})}{2n^{6/7}}}.$$
Эта величина есть $o(1)n^{-1}\exp(-\varkappa k)$.
3) Рассмотрим $l\ge\gamma^{-1}k+n^{4/7}$. В этом случае проделаем те же оценки, что и в прошлом пункте, но с $h=\varkappa-n^{-3/7}$.

Аналогичная теорема верна в случае нерешетчатого распределения
$$\mathbf{P}(M_n\in[x,x+\Delta_n))\sim\frac{\Delta_n\exp(-\varkappa x)}{\varkappa\gamma}\mathbf{P}\left(S_i^{(\varkappa)}>0,i>0\right)\mathbf{P}(S_j\le 0,j>0).$$