Большие уклонения максимума

Перейдем к следующей интересной нам задаче:
Пусть блуждание X_i решетчато со сдвигом 1 и имеет среднее μ, дисперсию σ^2 и удовлетворяет правостороннему условию Крамера $R(h) < \infty$, $0 \le h < h^+$.
Найдем асимптотику $\mathbf{P}(M_n = k)$, где $k \to \infty$, $n \to \infty$, $M_n = \max(S_1, ..., S_n)$.
Теорема 17.1. 1) Пусть $\mu > 0$. Тогда соотношение

$$\mathbf{P}(M_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} \exp(-\Lambda(k/n)n) \mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/n})} > 0, i > 0\right) \sum_{i=0}^{\infty} P(S_j \le 0, j \le i) R(h_{k/n})^{-i}. \tag{1}$$

выполнено равномерно по $x/n \in [\mu, m_2] \subset [\mu, m^+)$ при $n \to \infty$.
2) Пусть $\mu = 0$. Тогда (1) выполнено равномерно по $k/n \in [m_1, m_2] \subset (\mu, m^+)$ при $n \to \infty$.
3) Пусть $\mu < 0$. Тогда (1) выполнено равномерно по $k/n \in [m_1, m_2] \subset (\gamma, m^+)$ при $n \to \infty$, где $\gamma = m(\varkappa)$, $\varkappa > 0 : R(\varkappa) = 1$.
Доказательство Теоремы 17.1. Для доказательства нам понадобится лемма:
Лемма 17.1. Пусть $\tau_M = \min\{i : S_i = M_n\}$. Тогда

$$\mathbf{P}(M_n = k, \tau_M = l) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi l}\sigma(h_{k/l})} e^{-\Lambda(\frac{k}{l})} \mathbf{P}(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i > 0) \mathbf{P}(S_j \le 0, j \le n - l)$$

равномерно по k/l из

$$\frac{l}{n} \in \begin{cases} [\mu, m_2] \subset [\mu, m^+), & \text{при } \mu > 0, \\ [m_1, m_2] \subset (0, m^+), & \text{при } \mu = 0, \\ [m_1, m_2] \subset (0, m^+), & \text{при } \mu < 0. \end{cases}$$

Доказательство:
Докажем лемму в случае $\mu > 0$ только при $k/l \subset [\theta_1, \theta_2] \in (\mu, m^+)$. Представим искомую вероятность в виде

$$\mathbf{P}(M_n = k,\ \tau_M = l) = \mathbf{P}(S_l = k) \mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le l | S_l = k) \mathbf{P}(S_i \le 0,\ i \le n - l).$$

Для доказательства леммы нам остается показать, что

$$\mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le l | S_l = k) \sim \mathbf{P}(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i > 0),\ k, l \to \infty,$$

равномерно по указанным l.
Для доказательства представим рассматриваемую вероятность в виде разности

$$\mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le a_l | S_l = k) - \mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le a_l, \exists j > a_l : S_j \le 0, S_l = k) / \mathbf{P}(S_l = k),$$

где $a_l = \sqrt[3]{l}$. Тогда делимое в вычитаемом оценивается сверху величиной

$$\sum_{j=a_l}^{l} \sum_{m=-\infty}^{0} \mathbf{P}(S_j = m) \mathbf{P}(S_{l-j} = k - m) \le \sum_{j=a_l}^{l} \sum_{m=-\infty}^{0} \mathbf{P}(S_j = m) R(h_{k/l})^{l-j} e^{-h_{k/l}(k-m)} \le$$
$$\sum_{j=a_l}^{\infty} R(h_{k/l})^{-j} e^{-\Lambda(\frac{k}{l})l} = \frac{1}{1 - R(h_{k/l})} R(h_{k/l})^{-a_l} e^{-\Lambda(\frac{k}{l})l}.$$

Правая часть есть $o(\frac{1}{\sqrt{l}}) e^{-\Lambda(\frac{k}{l})}$, следовательно,

$$\mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le a_l, \exists j > a_l : S_j \le 0, S_l = k) / \mathbf{P}(S_l = k) = o(1),$$

причем $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым k/l, поскольку $R(h_{k/l})$ отделено от 1.

Положим $I = [a_l k/(2l), 3a_l k/(2l)]$ и рассмотрим

$$\mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le a_l, S_{a_l} \in I, S_l = k) = \sum_{m \in I} \mathbf{P}(S_i > 0, i \le a_l, S_{a_l} = m) \mathbf{P}(S_{l-a_l} = k - m).$$

При этом

$$\mathbf{P}(S_{l-a_l} = k - m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi(l - a_l)}\sigma(h_{(k-m)/(l-a_l)})} e^{-\Lambda\left(\frac{k-m}{l-a_l}\right)(l-a_l)}$$

При этом $l - a_l \sim l$, $h_{(k-m)/(l-a_l)} \sim h_{k/l}$,

$$\Lambda\left(\frac{k-m}{l-a_l}\right)(l - a_l) = \Lambda\left(\frac{k}{l}\right) l - m h_{k/l} + \ln R(h_{k/l}) a_l.$$

Последнее тождество устанавливается аналогично тому, как это было сделано в теореме Бартфаи. Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le a_l, S_{a_l} \in I, S_l = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi l}\sigma(h_{k/l})} \sum_{m \in I} e^{-\Lambda\left(\frac{k}{l}\right)l} \mathbf{P}(S_i > 0, i \le a_l, S_{a_l} = m) e^{h_{k/l} m} R(h_{k/l})^{-a_l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi l}\sigma(h_{k/l})} e^{-\Lambda\left(\frac{k}{l}\right)l} \mathbf{P}(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i \le a_l, S_{a_l}^{(h_{k/l})} \in I).$$

Аналогично

$$\mathbf{P}(S_{a_l} \in I, S_l = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi l}\sigma(h_{k/l})} \mathbf{P}(S_{a_l}^{(h_{k/l})} \in I).$$

При этом $\mathbf{P}(S_{a_l}^{(h_{k/l})} \in I) \to 1$ равномерно по рассматриваемым k/l при $l \to \infty$ (в сущности, в силу ЗБЧ, но равномерность удобнее показывать с помощью неравенства Чебышева). Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_{a_l} \in I | S_l = k) \to 1,\ \mathbf{P}(S_{a_l} \notin I | S_l = k) \to 0,\ \mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le a_l, S_{a_l} \in I, S_l = k) \sim \mathbf{P}(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i \le a_l).$$

Отсюда,

$$\mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le a_l | S_l = k) \sim \mathbf{P}(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i \le a_l) \to \mathbf{P}(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i > 0).$$

Лемма доказана.