Интегральная теорема для вероятностей умеренных уклонений

Пусть X_i — н.о.р, для простоты $\mathbf{E}X_i = 0$. Какова асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta_n[x))$$

при $x = o(n)$, $xn^{-1/2} \to \infty$?

Теорема 2.1. Пусть $x \in [n^{1/2+\delta}, n^{1-1/k}]$ при некоторых $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \sim \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/(2n)} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\ n^{i-1}}\right),\ n \to \infty.$$

Замечание. Если бы ЦПТ давала бы верную асимптотику при $xn^{-1/2} \to \infty$, то

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \sim 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right) \sim \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}\right).$$

Однако, мы видим, что это лишь часть асимптотики, при $k \geq 3$ результат будет значительно отличаться. Тем самым, ЦПТ работает в наших условиях до $x = o(n^{2/3})$, а при x имеющих порядок $n^{2/3}$ и выше она будет давать неточную асимптотику.

Доказательство Теоремы 2.1. Для удобства предположим, что $n^{(k-1)/k} < x < n^{k/(k+1)}$ при некотором $k \geq 3$. Случай $x \in n^{1/2+\delta}, n^{2/3}]$ рассматривается аналогично. Тогда

$$\Lambda(x/n) = \Lambda(0) + \Lambda'(0)\frac{x}{n} + \Lambda''(0)\frac{x^2}{2n} + ... + \Lambda^{(k)}(0)\frac{x^k}{n^k k!} + O\left(\frac{x^{k+1}}{n^{k+1}}\right).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_n - \mu n \in \Delta_n[x)) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda(0)n - \Lambda'(0)x - \Lambda''(0)\frac{x^2}{2n} - ... - \Lambda^{(k)}(0)\frac{x^k}{n^{k-1}k!}\right).$$

Выпишем первые три члена асимптотики, для этого найдем $\Lambda'(\theta)$ и $\Lambda''(\theta)$:

$$\Lambda'(\theta) = (\theta h_\theta - \ln R(h_\theta))' = h_\theta + \theta(h_\theta)' - m(h_\theta)(h_\theta)' = h_\theta,$$
$$\Lambda''(\theta) = (h_\theta)' = (m^{-1}(\theta))' = \frac{1}{m'(m^{-1}(\theta))} = \frac{1}{\sigma^2(h_\theta)}.$$

Тем самым, при рассматриваемых x

$$\mathbf{P}(S_n - \mu n \in \Delta_n[x)) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\ n^{i-1}}\right).$$

Рассмотрим $n^{(k-1)/k} \leq x < n^{k/(k+1)}$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) = \sum_{i=0}^{n^{5/(4k)}n/\Delta_n - 1} \mathbf{P}(S_n \in \Delta_n[x + i\Delta_n, x + (i+1)\Delta_n)) + \mathbf{P}(S_n \geq x + \sqrt[k]{n}). \quad (1)$$

Рассмотрим первую сумму в правой части (1). Тогда при $y < n^{5/(4k)}$ справедливо соотношение

$$(x+y)^i = x^i + yx^{i-1}(1 + y/x)^{i-1} = x^i + o(n^{i-1}),\ i > 2,\ (x+y)^2 = x^2 + 2xy + o(n),$$

поскольку $yx^{i-1} < n^{i-1}n^{5/(4k)-2/(k+1)}$, откуда

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta_n[x+i\Delta_n, x+(i+1)\Delta_n)) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\; n^{i-1}}\right) e^{-\frac{xi\Delta_n}{\sigma^2 n}}.$$

Следовательно, сумма в правой части (1) эквивалентна

$$\frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\; n^{i-1}}\right) \frac{1}{1-e^{-(x\Delta_n)/(\sigma^2 n)}} \sim \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\; n^{i-1}}\right)$$

При этом в силу неравенства Маркова

$$\mathbf{P}(S_n \geq x + \sqrt[k]{n}) \leq \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n} + \frac{\sqrt[k]{n}}{n}\right) n\right).$$

При этом из приведенных выше соображений

$$\Lambda\left(\frac{x}{n} + \frac{\sqrt[k]{n}}{n}\right) n = -\frac{x^2}{2\sigma^2 n} - \sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\; n^{i-1}} - \frac{xn^{5/(4k)-1}}{2\sigma^2}.$$

При этом $xn^{5/(4k)-1} > n^{1/(4k)}$, откуда

$$\mathbf{P}(S_n \geq x + \sqrt[k]{n}) = o(1)\frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\; n^{i-1}}\right).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \sim \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\; n^{i-1}}\right).$$