Локальная и интегро-локальная теоремы для случайных векторов

Аналогичные локальные и интегро-локальные теоремы можно сформулировать в многомерном случае. Начнем с того, что разберемся как в этом случае определить решетчатость и нерешетчатость.

Назовем множество D *порождающим* $\mathbb{Z}^d$, если $D \subseteq \mathbb{Z}^d$, причем не существует замкнутого относительно сложения подмножества $S \subsetneq \mathbb{Z}^d$, т.ч. $D \subseteq S$. Под множеством значений случайного вектора X мы будем подразумевать такое множество A, что $\mathbf{P}(X \in A) = 1$.

- Назовем вектор *вырожденным*, если при некотором неслучайном векторе $\vec{c}$ вектор $(\vec{c}, X)$ п.н. равен константе.
- Назовем вектор *арифметическим*, если для некоторого неслучайного вектора $\vec{y}_0$, такого что $\mathbf{P}(X = \vec{y}_0) > 0$ и множество значений вектора $X - y_0$ является порождающим $\mathbb{Z}^d$.
- Назовем вектор *сильно решетчатым*, если множество значений вектора $CX - y_0$ является порождающим $\mathbb{Z}^d$, где C — некоторая квадратная матрица.
- Назовем вектор *решетчатым*, если найдется вектор $\vec{c} \neq 0$, такой что $(\vec{c}, X)$ является решетчатой случайной величиной.
- Назовем вектор *нерешетчатым* в противном случае.

Пример 2.1. Как и прежде решетчатость и нерешетчатость это вопрос множества значений D, которые принимает вектор. Рассмотрим несколько примеров:

- Пусть множество значений $D = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Тогда оно порождает $\mathbb{Z}^2$, поскольку всякую точку $\mathbb{Z}^2$ можно представить как сумму точек решетки. При этом вектор X с таким множеством значений не будет арифметическим, поскольку множества $D-(1, 0)$ (под этой записью подразумевается, что мы рассматриваем множество, получаемое вычитание из векторов, лежащих в D вектора (1,0)) и $D - (0, 1)$ не являются порождающими $\mathbb{Z}^2$. Скажем $D - (1, 0) = \{(0, 0), (-1, 1)\}$ и это множество вкладывается в $S = \{(-x, x),\ x \in \mathbb{Z}\}$. Соответствующий вектор является вырожденным, поскольку при $\vec{c} = (1, 1)$ величина $(\vec{c}, X) = 1$ п.н.
- Множество $D = \{(1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ является арифметическим, поскольку $D - (0, 0)$ порождает $\mathbb{Z}^d$.
- Множество $D = \{(3, 1), (1, 2), (1, 1)\}$ не является арифметическим, поскольку $D-(x, y)$ будет иметь первую координату четной при любом $(x, y) \in D$, а значит будет порождать подмножество $2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}^2$. При этом оно сильно решетчато, поскольку при
$$C := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, CD = \{(3/2, 1), (1/2, 2), (1/2, 1)\},$$
и $CD - (1/2, 1) = \{(1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ порождает $\mathbb{Z}^2$.
- Множество $D = \{(1, 0), (2, e), (1, \pi)\}$ является решетчатым, поскольку при $\vec{c} = (1, 0)$ величина $(\vec{c}, X)$ целочисленная. При этом оно не является сильно решетчатым.
- Множество $D = \{(0, 0), (\pi, \pi), (e, e)\}$ является нерешетчатым, поскольку 0, $(c_1 + c_2)\pi$, $(c_1 + c_2)e$ не ложатся на решетку $\mathbb{Z}^d$ ни при каком векторе c.

Теорема 2.1. Пусть X_i — н.о.р. векторы, $\mathbf{E}X_i = \vec{\mu}$ — вектор средних, Σ^2 — матрица ковариации вектора X.
1) Пусть X_i — арифметические с $\vec{y}_0$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n = \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}\det(\Sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^t\Sigma^{-2}(\vec{x} - \vec{\mu})\right) + o\left(\frac{1}{n^{d/2}}\right)$$

где $o()$ равномерно мало по $\vec{x}$, $\vec{x} - \vec{y}_0 n \in \mathbb{Z}^d$.
2) Пусть X_i — сильно решетчатые с матрицей C и вектором $\vec{y}_0$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n = \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} \det(\Sigma^2)^{1/2} \det C} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^t \Sigma^{-2} (\vec{x} - \vec{\mu})\right) + o\left(\frac{1}{n^{d/2}}\right),$$

где $o()$ равномерно мало по $\vec{x}$, $C\vec{x} - \vec{y}_0 n \in \mathbb{Z}^d$.
3) Пусть X_i — нерешетчатые векторы. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta_n[\vec{x}]) = \frac{\Delta_n^d}{(2\pi n)^{d/2} (\det(\Sigma^2))^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^t \Sigma^{-2} (\vec{x} - \vec{\mu})\right) + o\left(\frac{\Delta_n^d}{n^{d/2}}\right),$$

при всех Δ_n достаточно медленно стремящихся к нулю, где $o()$ равномерно мало по $\vec{x}$.

Аналогично одномерному случаю из локальной и интегро-локальной теорем, мы можем получить теоремы о больших уклонениях. Для этого положим

$$R(\vec{h}) = \mathbf{E} e^{(\vec{h}, \vec{X})},\ m(\vec{h}) = grad \ln R(h),\ \sigma^2(\vec{h}) = ((\ln R(h))''_{h_i, h_j}, i, j \in \{1, ..., d\}), \vec{h}_{\vec{\theta}} : m(\vec{h}_{\vec{\theta}}) = \vec{\theta}.$$

При этом $m(\vec{h})$, $\sigma^2(h)$ — вектор средних и ковариационная матрица вектора $\vec{X}^{(\vec{h})}$ с сопряженным распределением

$$\mathbf{P}(X^{(\vec{h})} \in A) = R(\vec{h})^{-1} \int_A e^{(\vec{h}, \vec{y})} \mathbf{P}(\vec{X} \in d\vec{y}).$$

Замечание 1. Можно утверждать, что соотношения 1)-3) Теоремы 1 равномерны по сопряженным распределениям:

$$\mathbf{P}(S_n^{(\vec{h})} = \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} \det(\sigma(\vec{h})^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - m(\vec{h}))^t \sigma(h)^{-2} (\vec{x} - m(\vec{h})\right) + \frac{o(1)}{n^{d/2}}$$

где $o(1)$ равномерно мало по $\vec{h} \in D^*$, где D^* — компакт из D.

При этом как и прежде положим

$$\Lambda(\vec{\theta}) = \sup_{\vec{h}}((\vec{h}, \vec{\theta}) - \ln R(\vec{h})) = (\vec{h}_{\vec{\theta}}, \vec{\theta}) - \ln R(\vec{h}_{\vec{\theta}}).$$

Теорема 2.2. Пусть $\vec{X}_i$ — н.о.р. векторы с конечной дисперсией, $R(\vec{h}) < \infty$ при $\vec{h} \in D$, G — образ D при отображении $m(\vec{h})$.
1) Пусть X_i — арифметические с $\vec{y}_0$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n = \vec{x}) = \frac{1 + o(1)}{(2\pi n)^{d/2} \det(\sigma^2(\vec{h}_{\vec{x}/n}))^{1/2}} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{\vec{x}}{n}\right) n\right)$$

где $o()$ равномерно мало по $\vec{x} - \vec{y}_0 n \in \mathbb{Z}^d$, $\vec{x}/n \in G^*$ для любого компакта G^*, содержащегося в G.
2) Пусть X_i — сильно решетчатые с матрицей C и вектором $\vec{y}_0$. Тогда в аналогичным условиях

$$\mathbf{P}(S_n = \vec{x}) = \frac{1 + o(1)}{(2\pi n)^{d/2} \det(\sigma^2(\vec{h}_{\vec{x}/n}))^{1/2} \det C} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{\vec{x}}{n}\right) n\right),$$

где $o()$ равномерно мало по $\vec{x}$: $C\vec{x} - \vec{y}_0 n \in \mathbb{Z}^d$, $\vec{x}/n \in G^*$ для любого компакта G^*, содержащегося в G.
3) Пусть X_i — нерешетчатые векторы. Тогда в тех же условиях, что и в 1)

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta_n[\vec{x}]) = \frac{\Delta_n^d (1 + o(1))}{(2\pi n)^{d/2} \det(\sigma^2(\vec{h}_{\vec{x}/n}))^{1/2}} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) n\right),$$

при всех Δ_n достаточно медленно стремящихся к нулю, где $o()$ равномерно мало по $\vec{x}/n \in G^*$ для любого компакта G^*, содержащегося в G.

Доказательство Теоремы 2.2. Докажем 1), остальные случаи рассматриваются аналогично. Из определения сопряженного распределения

$$\mathbf{P}(S_n = \vec{x}) = e^{-(\vec{h},\vec{x})} R(\vec{h})^{-n} \mathbf{P}(S_n^{(\vec{h})} = \vec{x}).$$

Положим $\vec{h} = \vec{h}_{x/n}$, тогда

$$\mathbf{P}(S_n^{(\vec{h_{x/n}})} = \vec{x}) \sim \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} \sqrt{\det \sigma^2(h_{x/n})}}$$

в силу локальной теоремы. Стоит отметить, что поскольку x/n зависит от n, то указанное соотношение не следует напрямую из локальной теоремы, в которой распределение шагов не должно зависеть от n, но вытекает из Замечания 1. Имеем

$$\mathbf{P}(S_n = \vec{x}) \sim e^{-(\vec{h}_{\vec{x}/n}, \vec{x}/n)n} R(\vec{h}_{\vec{x}/n})^{-n} \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} \sqrt{\det \sigma^2(h_{x/n})}},$$

что и требовалось доказать.

Поведение траектории при условии уклонения

Зададимся вопросом о том, как устроены шаги X_i при условии уклонения $S_n \in \Delta_n[x)$, то есть тем, как ведет себя вероятность

$$\mathbf{P}(X_1 \in [a_1, b_1], ..., X_k \in [a_k, b_k] | S_n \in \Delta_n[x)).$$

Теорема 2.3. При любых k, $a_1, ..., a_k$, $b_1, ..., b_k$

$$\mathbf{P}(X_1 \in [a_1, b_1], ..., X_k \in [a_k, b_k] | S_n \in \Delta_n[x)) \to \mathbf{P}(X_1^{(h_{x/n})} \in [a_1, b_1]) ... \mathbf{P}(X_k^{(h_{x/n})} \in [a_k, b_k])$$

при $n \to \infty$ равномерно по $x \in G^*$, где G^* компактное подмножество G.

Доказательство Теоремы 2.3. Для доказательства выведем формулу для $\mathbf{P}(S_{n-k} \in \Delta_n[x - y))$ при фиксированных k, y. Для этого заметим, что

$$\Lambda\left(\frac{x-y}{n-k}\right)(n-k) = \Lambda\left(\frac{x}{n} + \frac{xk - yn}{n(n-k)}\right)(n-k) = \Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n - k\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) + h_{x/n}\frac{xk - yn}{n} + o(1) =$$
$$\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n + k \ln R(h_{x/n}) - y h_{x/n} + o(1).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_{n-k} \in \Delta_n[x - y)) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{(x-y)/(n-k)})} e^{-\Lambda\left(\frac{x-y}{n-k}\right)} \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} e^{h_{x/n} y} e^{-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n} R(h_{x/n})^{-k}.$$

Полученная формула справедлива и при растущих k, y при $(xk - yn) = o(\sqrt{n})$.

Теперь

$$\mathbf{P}(X_1 \in [a_1, b_1], ..., X_k \in [a_k, b_k] | S_n \in \Delta_n[x)) =$$
$$\frac{1}{\mathbf{P}(S_n \in \Delta_n[x))} \int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_k}^{b_k} \mathbf{P}(X_1 \in du_1) ... \mathbf{P}(X_k \in du_k) \mathbf{P}(S_{n-k} \in \Delta_n[x - u_1 ... - u_k)).$$

В силу равномерности сходимости

$$\mathbf{P}(S_{n-k} \in \Delta_n[x - u_1 - ... - u - k)) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi}\sigma(h_{x/n})} e^{-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n} e^{h_{x/n}(u_1 + ... + u_k)} R(h_{x/n})^{-k},$$

откуда

$$\mathbf{P}(X_1 \in [a_1, b_1], ..., X_k \in [a_k, b_k] | S_n \in \Delta_n[x)) \xrightarrow{d} R(h_{x/n})^{-k} \int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_k}^{b_k} e^{h_{x/n}(u_1 + ... + u_k)} \mathbf{P}(X_1 \in du_1) ... \mathbf{P}(X_k \in du_k) =$$

$$\mathbf{P}(X_1^{(h_{x/n})} \in [a_1, b_1]) ... \mathbf{P}(X_k^{(h_{x/n})} \in [a_k, b_k])$$