Мы хотели бы получить аналогичный "локальный" результат для нерешетчатых распределений. Если бы распределения были абсолютно-непрерывными, то можно было бы доказывать аналогичную теорему для плотностей. Однако, нерешетчатые распределения включают в себя и сингулярные, и некоторые дискретные распределения. Поэтому используют следующий интегро-локальный подход:

Теорема 2.1. (Стоуна) Пусть X_i — н.о.р. случайные величины с математическим ожиданием $EX = \mu$ и дисперсией $DX = \sigma^2 > 0$, имеющие нерешетчатое распределение. Тогда при всех Δ_n достаточно медленно стремящихся к 0 справедливо соотношение

$$P\left(S_n \in [x, x+\Delta_n)\right) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu n)^2}{2n\sigma^2}}.$$

при всех $x - \mu n = O(\sqrt{n})$, причем равномерно по $x - \mu n \in [-t\sqrt{n}, t\sqrt{n}]$ при любом $t > 0$.

Что это за странный результат и для чего он нужен?
Для начала убедимся, что он согласуется с привычной нам ЦПТ.

$$P\left(S_n \in [\mu n + \sigma t_1\sqrt{n}, \mu n + \sigma t_2\sqrt{n}]\right) \to \Phi(t_2) - \Phi(t_1)$$

при $n \to \infty$. Эта теорема позволяет оценивать вероятности попадания в отрезки длины $\sqrt{n}$. Заметим, что этот результат есть следствие Теоремы 1:

$$P\left(S_n \in [\mu n + t_1\sigma\sqrt{n}, \mu n + t_2\sigma\sqrt{n}]\right) = \sum_{k=1}^{[(t_2-t_1)\sqrt{n}/\Delta_n]} P\left(S_n \in [\mu + t_1\sigma\sqrt{n} + k\Delta_n, \mu + t_1\sigma\sqrt{n} + (k+1)\Delta_n)\right) +$$

$$o(n^{-1/2}) = (1+o(1)) \sum_{k=1}^{[(t_2-t_1)\sqrt{n}/\Delta_n]} \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(t_1\sqrt{n}+k\Delta_n)^2}{2n}} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} dt = \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где в первом переходе $o(n^{-1/2})$ возникло из-за того, что $(t_2 - t_1)\sqrt{n}$ может не делиться нацело на Δ_n, во втором переходе мы воспользовались Теоремой 1 (в частности, указанной в ней равномерностью сходимости), а в третьем тем, что представленная сумма является интегральной с шагом $\Delta_n n^{-1/2}$.
На этих рассуждениях мы видим, что интегролокальные теоремы позволяют нам оценивать вероятности попадания суммы как в отрезки длины порядка $\sqrt{n}$, так и в отрезки длины $O(1)$ и даже некоторые отрезки длины $o(1)$. Сейчас мы увидим, насколько удобна эта форма для работы с интегралами, что позволяет нам применить этот результат для доказательства теоремы о больших уклонениях.

Пример 2.1. Отметим, что рассматривать произвольное $\Delta_n \to 0$ не представляется возможным. Действительно, представим, что X_i принимают значения $0, \pi, e$. Тогда распределение нерешетчато, однако у любой фиксированной точки x, не являющейся числом вида $a\pi + be$ есть окрестность, в которой нет ни одного возможного значения S_n, а следовательно вероятность попадания в такую окрестность не имеет вида, указанного в Теореме 1.

Докажем с помощью интегро-локальной теоремы интегро-локальную теорему о больших уклонениях:

Теорема 2.2. Пусть X_i — н.о.р. нерешетчатые случайные величины с математическим ожиданием $\mathbf{E}X = \mu$ и дисперсией $\mathbf{D}X = \sigma^2 > 0$, $R(h) = \mathbf{E}e^{hX} < \infty$ при $h \in [0, h^+)$, $h^+ > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) n\right)$$

равномерно по $x/n \in [\mu, \theta_2]$ при любом $\theta_2 < m^+$. Здесь как и прежде

$$m(h) = (\ln R(h))',\ \sigma^2(h) = m'(h),\ h_\theta : m(h_\theta) = \theta,\ m^+ = \lim_{h \to h^+} m(h),\ \Lambda(\theta) = \theta h_\theta - \ln R(h_\theta).$$

Доказательство Теоремы 2.2. Положим для краткости $\Delta_n[x) = [x, x+\Delta_n)$ и

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta_n[x)) = \int_x^{x+\Delta_n} \mathbf{P}(S_n \in dy) = R(h)^n e^{-hx} \int_x^{x+\Delta_n} e^{-h(y-x)} \mathbf{P}(S_n^{(h)} \in dy).$$

При этом при $y \in [x, x+\Delta_n]$, $h \in [0, b]$ и некотором $\xi = \xi(y) \in [0, \Delta_n]$

$$1 - e^{-h(y-x)} = h(y-x)e^{-h\xi} \leq \Delta_n b,$$

а значит $e^{-h(y-x)}$ есть $(1+o(1))$, где $o(1)$ равномерно мало по y и $h \in [0, b]$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta_n[x)) \sim R(h)e^{-hx}\mathbf{P}(S_n^{(h)} \in [x, x+\Delta_n)),\ n \to \infty.$$

Как и в решетчатом случае возьмем $h = h_{x/n}$ и получим в силу интегро-локальной теоремы Стоуна

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta_n[x)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} e^{-\Lambda(x/n)n}.$$

Теорема доказана по модулю того, что эквивалентность в теореме Стоуна должна быть равномерной по h для всех сопряженных распределений $S_n^{(h)}$. Этот факт мы также оставим без доказательства (доказательство будет приведено в курсе дополнительных глав теории вероятностей).

Аналогично решетчатому случаю из интегро-локальной теоремы о больших уклонениях можно получить теорему Петрова

$$\mathbf{P}(S_n \geq \theta n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \exp\left(-\Lambda\left(\theta\right)n\right),$$

где $\theta \in (\mu, m^+)$ (равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$.

Отметим, что в доказательстве теоремы мы напрямую не использовали конечность дисперсии X_i, а только конечность дисперсии $X_i^{(h_{x/n})}$. Последний факт вытекает из условия Крамера при $x/n \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$, поскольку

$$\mathbf{E}(X^{(h)})^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{hx}\mathbf{P}(X \in dx) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{hx}x^2\mathbf{P}(X \in dx) + \int_{\mathbb{R}^-} e^{hx}x^2\mathbf{P}(X \in dx).$$

Первый интеграл конечен, поскольку x^2e^{hx} при $x \to \infty$ есть $o(1)e^{(h+\varepsilon)x}$, а $R(h+\varepsilon) < \infty$ при $h < m^+$ и достаточно малых ε. Аналогично второй интеграл конечен, поскольку $x^2e^{hx} = o(1)$ при $x \to -\infty$ при $h > 0$. Тем самым условие конечности дисперсии в локальной и в интегро-локальной теоремах о больших уклонениях является значимым только в том случае, когда нас интересуют x/n приближающихся к μ. В частности, в теореме Петрова условие конечности дисперсии не требуется.

Итак, мы получили две асимптотики:

$$\mathbf{P}(S_n \geq \theta n) \sim \frac{C(\theta)}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(\theta)n},\ \mathbf{P}(S_n \geq \mu n + x) \sim \Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Первая справедлива при $\theta > \mu$, а вторая при $x = O(\sqrt{n})$. Хотелось бы разобраться с тем, как устроен промежуточный случай $\mathbf{P}(S_n \geq \mu n + x)$ при $x = o(n)$ и как происходит переход одной асимптотики в другую.