Во втором семестре мы будем изучать точную асимптотику больших уклонений.
Один из базовых результатов в этой области был получен уже известным нам Крамером, а затем был обобщен индийскими математиками Бахадуром и Ранго Рао в 1960 году. Независимо от них в 1965 году советский математик В.В. Петров получил близкие результаты:

**Теорема 1.1.** (Петрова). Пусть $X_i$ н.о.р. нерешетчатые, $\mathbf{E}X_i = \mu$, $R(h) = \mathbf{E}e^{hX}$ конечно при $h \in (0, h^+)$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n \geq \theta n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi h_\theta \sigma(h_\theta) n}} e^{-\Lambda(\theta) n}$$

при $n \to \infty$, $\theta \in (\mu, m^+)$, где $m^+ = \lim_{h \to h^+} m(h)$.

Давайте сравним с тем, что мы получили для грубых и точных больших уклонений случайных блужданий.

**Теорема 1.2.** (Крамера). Пусть $X_i$ н.о.р. Тогда

$$-\inf_{\theta \in A_{int}} \Lambda(\theta) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{\ln \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A\right)}{n} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{\ln \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A\right)}{n} \leq -\inf_{\theta \in \overline{A}} \Lambda(\theta).$$

Во-первых, в первой теореме не накладывается никаких условий на конечность $R(h)$. С другой стороны, как мы видели, это достаточно иллюзорное преимущество, поскольку в случае более тяжелых чем экспоненциальных хвостов распределения теорема Крамера просто сообщит, что вероятности больших уклонений $S_n$ также неэкспоненциальны.
Во-вторых, в первой теореме рассматриваются произвольные множества $A$, а во второй указаны только лучи. В действительности, для множеств произвольного вида точную асимптотику выписать достаточно затруднительно, но чуть позже мы увидим, как выписать ее для достаточно хороших множеств $A$.
В-третьих, в первой теореме область расположения $A$ — вся прямая, а во второй рассматривается только участок $(\mu, m^+)$. При выполнении левостороннего условия Крамера $R(h) = \mathbf{E}e^{hX} < \infty$, $h^- < h < 0$ можно расширить теорему, захватив множества вида $\mathbf{P}(S_n \leq \theta n)$, $\theta \in (m^-, \mu)$. Но, скажем, захватить $\theta = \mu$ в такой форме не получится (хотя бы потому, что в знаменателе теоремы Петрова фигирирует $h_\theta$, равное нулю при $\theta = \mu$.
В-четвертых, в теореме рассматривается нерешетчатое распределение. Можно сформулировать аналогичную теорему для решетчатого распределения, но с некоторыми ограничениями. Функция лямбда при этом окажется той же, что и прежде, но решетчатость качественным образом отразится на константе перед экспонентой.

Исправить эти недостатки, насколько это возможно, позволяет аппарат так называемых локальных и интегро-локальных теорем. Начнем с более простого случая локальных теорем. Начнем с теоремы, принадлежащей Гнеденко:

**Теорема 1.3.** Пусть $X_i$ — н.о.р. решетчатые случайные величины с математическим ожиданием $\mathbf{E}X = \mu$ и дисперсией $\mathbf{D}X = \sigma^2 > 0$ с решеткой $a + kd$, $k \in \mathbb{Z}$, где $d$ — максимально возможное. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left(-\frac{(k - \mu n)^2}{2\sigma^2 n}\right) + \frac{o(1)}{\sqrt{n}},$$

при всех $k \in an + d\mathbb{Z}$, причем $o(1)$ равномерно мало по всем $k$.

Эта теорема более общая чем центральная предельная теорема (в ограничении на решетчатый случай). Действительно,

$$\mathbf{P}(S_n - \mu n \in [b\sqrt{n}, c\sqrt{n}]) = \sum_{k \in [b\sqrt{n}, c\sqrt{n}]} \mathbf{P}(S_n = k) = \sum_{k \in [b\sqrt{n}, c\sqrt{n}]} \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2 n}\right) + o(1),$$

где $o(1)$ выносится за пределы суммы из-за равномерной малости. Полученная сумма является интегральной для интеграла

$$\int_b^c \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx,$$

что и дает нам ЦПТ.

Из этой теоремы несложно получается локальная теорема о больших уклонениях
**Теорема 1.4.** Пусть $X_i$ — н.о.р. решетчатые случайные величины с математическим ожиданием $\mathbf{E}X = \mu$ и дисперсией $\mathbf{D}X = \sigma^2 > 0$ с решеткой $a + kd$, $k \in \mathbb{Z}$, где $d$ — максимально возможное, $R(h) = \mathbf{E}e^{hX} < \infty$ при $h \in [0, h^+)$, $h^+ > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right) n\right)$$

равномерно по $k \in an + d\mathbb{Z}$, $k/n \in [0, m^+)$, причем $o(1)$ равномерно мало по $k \in [0, \theta_1]$ при любом $\theta_1 \in [0, m^+)$. Здесь как и прежде

$$m(h) = (\ln R(h))',\ \sigma^2(h) = m'(h),\ h_\theta : m(h_\theta) = \theta,\ m^+ = \lim_{h \to h^+} m(h),\ \Lambda(\theta) = \theta h_\theta - \ln R(h_\theta).$$

Докажем эту теорему, пользуясь теоремой Гнеденко. Давайте сперва переформулируем теорему Гнеденко в виде

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left(-\frac{(k - \mu n)^2}{2\sigma^2 n}\right)$$

при $|k - \mu n| = O(\sqrt{n})$, поскольку в силу условия на $k$ величина в правой части имеет порядок $n^{-1/2}$.

Действительно, при любом $h$ перейдем к сопряженному распределению:

$$\mathbf{P}(S_n = k) = e^{-hk} R(h)^n \mathbf{P}(S_n^{(h)} = k).$$

Выберем $h$ так, что $\mathbf{E}X_1^{(h)} = m(h) = k/n$ (по определению нужно взять $h = h_{k/n}$). Тогда

$$\mathbf{P}(S_n^{(h)} = k) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})},$$

поскольку $k - n\mathbf{E}X_1^{(h)} = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right) n\right)$$

При этом здесь есть тонкий момент — мы применяли теорему Гнеденко для $X_i^{(h)}$, где $h$ зависит от $n$, хотя сама теорема формулируется в условиях фиксированного распределения величин. Однако, это можно делать, если в теореме Гнеденко показать, что

$$\mathbf{P}(S_n^{(h)} = k) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} \exp\left(-\frac{(k - m(h)n)^2}{2\sigma^2(h) n}\right)$$

выполнено равномерно по $h \in [0, h_{\theta_1}]$ при $|k - m(h)n| \leq c\sqrt{n}$, где $c$ — фиксированно. Оказывается, что при доказательстве теоремы Гнеденко это можно сделать. В этом курсе мы опустим этот вопрос, оставив его для курса дополнительных глав теории вероятностей.

Как и прежде из локальной теоремы следует интегральная. Одной из форм интегральной теоремы будет теорема Петрова:

$$\mathbf{P}(S_n \geq \theta n) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta\,(1 - e^{dh_\theta})},$$

равномерно по $\theta n \in an + k\mathbb{Z}$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$. Действительно, в силу локальной теоремы

$$\mathbf{P}(S_n \in [\theta n, \theta n + \sqrt[3]{n}]) \sim \sum_{k=\theta n}^{\theta n + \sqrt[3]{n}} \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right) n\right).$$

При этом $\sigma(h_{k/n}) \to \sigma(h_\theta)$, поскольку $\sigma$ и $h.$ непрерывны, а $k/n \to \theta$,

$$\Lambda\left(\frac{k}{n}\right)n = \Lambda\left(\theta + \frac{k-\theta n}{n}\right)n = \Lambda(\theta)n + (k-\theta n)\Lambda'(\theta) + O\left(\left(\frac{(k-\theta n)^2}{n}\right)^2 n\right),$$

где последняя величина есть $o(1)$ для рассматриваемых $k$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_n \in [\theta n, \theta n + \sqrt[3]{n}]) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n} \sum_{k=\theta n}^{\theta n + \sqrt[3]{n}} e^{-h_\theta(k-\theta n)} \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)\left(1 - e^{-dh_\theta}\right)} e^{-\Lambda(\theta)n}.$$

Остается заметить, что

$$\mathbf{P}(S_n \geq \theta n + \sqrt[3]{n}) \leq R(h_\theta)^n e^{-h_\theta(\theta n + \sqrt[3]{n})} = e^{-\Lambda(\theta)n} e^{-h_\theta \sqrt[3]{n}} = o(1)\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\Lambda(\theta)n}.$$