Спецкурс "Большие уклонения"

Шкляев А.В.

12 декабря 2017 г.

Теорема Гартнера-Эллиса

Закончим доказательство теоремы Гартнера-Эллиса.
2.2) Как и в теореме Крамера предположим, что супремум в определении Λ недостижим. Тогда рассмотрим $\vec{X}_n = \vec{Y}_n + \vec{Z}_n$, $\vec{Y}_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{E}/(Mn))$ и не зависит от $\vec{Z}_n$, где M — некоторый параметр, E — единичная матрица. Тогда

$$\ln R_{\vec{X}_n}(n\vec{h}) = \ln R_n(n\vec{h}) + \frac{n}{2M}|\vec{h}|^2 \geq \ln R_n(n\vec{h})$$

и

$$\ln \tilde{R}(\vec{h}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln R_{X_n}(n\vec{h}) = \ln R(\vec{h}) + \frac{n}{2M}|\vec{h}|^2 \geq \ln R(h),\ \tilde{\Lambda}(\vec{\theta}) \leq \Lambda(\vec{\theta}),$$

где $\tilde{\Lambda}(\vec{\theta}) = \sup_{\vec{h}}((\vec{\theta}, \vec{h}) - \ln \tilde{R}(\vec{h}))$. При этом $\ln R(\vec{h}) \geq (\vec{h}, \vec{\mu})$, где $\vec{\mu} = grad \ln R(\vec{0})$, существующий в силу дифференцируемости $\ln R$. , а значит

$$(\vec{h}, \vec{x}) - \ln \tilde{R}(\vec{h}) \leq (\vec{h}, (\vec{x} - \vec{\mu})) - \frac{1}{2M}|\vec{h}|^2 \to -\infty,$$

$h \to \infty$. Следовательно, супремум в $\tilde{\Lambda}(\vec{\theta})$ достижим в конкретной точке $\vec{h}$, удовлетворяющей условию $\vec{x} = grad \ln \tilde{h}(\vec{h})$.
В силу 2.1)

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{X}_n \in U_{\delta/2}(\vec{x})) \geq -\tilde{\Lambda}(\vec{x}) \geq -\Lambda(\vec{x}).$$

При этом

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n \in U_\delta(\vec{x})) \geq \mathbf{P}(\vec{X}_n \in U_{\delta/2}(\vec{x})) - \mathbf{P}(|\vec{Y}_n| > \delta/2).$$

Модуль вектора больше $\delta/2$ только если одна из координат больше по модулю $\delta/(2\sqrt{d})$. Значит

$$\mathbf{P}(|\vec{Y}_n| > \delta/2) \leq 2d\left(1 - \Phi\left(\frac{\delta^2\sqrt{nM}}{2d}\right)\right).$$

В силу соотношения

$$\Phi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x^2/2},$$

имеем $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}((Y_1 + ... + Y_n)/n > \delta/2)) \leq -M\delta^2/(2d)$. Аналогично рассуждениям пункта 1.2), отсюда следует требуемое утверждение.

Нам понадобится следующее определение: функция Λ называется хорошей функцией роста, если это функция роста, для которой множество $\{\theta : \Lambda(\theta) < x\}$ компактно при любом x.
Рассмотрим общую теорему, называемую теоремой Варадрана.
Теорема 11.1. (Varadran). Пусть $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, Z_n — последовательность случайных векторов из $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая условию

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{E} e^{\gamma n \phi(Z_n)} < \infty$$

при некотором $\gamma > 1$ и ПБУ с хорошей функцией Λ. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \mathbf{E} e^{n\phi(Z_n)}}{n} = \sup(\phi(x) - \Lambda(x)).$$

Отметим, что в действительности теорема справедлива в гораздо более общих пространствах чем $\mathbb{R}^d$, вместо него можно рассматривать произвольное регулярное топологическое пространство.

Доказательство Теоремы 11.1. Доказательство Теоремы разобьем на 3 вспомогательных утверждения:

Лемма 11.1. Пусть ϕ — непрерывная снизу функция, Z_n — некоторая последовательность, удовлетворяющая ПБУ с функцией Λ. Тогда

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\ln \mathbf{E} e^{n\phi(Z_n)}}{n} \geq \sup(\phi(x) - \Lambda(x)).$$

Доказательство Леммы 11.1. Для доказательства рассмотрим произвольное x и $U_\delta(x)$ такое, что $\phi(y) \geq \phi(x) - \varepsilon$ при $y \in U_\delta(x)$. Тогда

$$\mathbf{E} e^{n\phi(Z_n)} = \int_{\mathbb{R}} e^{n\phi(y)} \mathbf{P}(Z_n \in dy) \geq e^{n(\phi(x) - \varepsilon)} \mathbf{P}(Z_n \in U_\delta(x)).$$

Тогда в силу ПБУ

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\ln \mathbf{E} e^{n\phi(Z_n)}}{n} \geq \phi(x) + \Lambda(x) - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε, x получаем утверждение Леммы.

Лемма 11.2. Пусть ϕ — непрерывная сверху функция, Z_n — некоторая последовательность, удовлетворяющая ПБУ с хорошей функцией роста Λ. Кроме того, пусть

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{n} \ln \mathbf{E}\left(e^{\phi(Z_n)}; \phi(Z_n) \geq M\right) = -\infty. \qquad (1)$$

Тогда
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\ln \mathbf{E}e^{n\phi(Z_n)}}{n}\geq \sup(\phi(x)-\Lambda(x)).$$

Доказательство Леммы 11.2. 1) Предположим, что ϕ ограничена сверху константой M. Фиксируем u и рассмотрим $C_u=\{\theta:\Lambda(\theta)<u\}$. Фиксируем x из C_u и рассмотрим окрестность $U_{\delta x}(x)$, т.ч.

$$\inf_{\theta\in U_{\delta(x)}(x)}\Lambda(\theta)\geq\Lambda(x)-\delta,\quad \inf_{y\in U_{\delta(x)}(x)}\phi(y)\leq\phi(x)+\delta.$$

Выделим из этих окрестностей конечное подпокрытие компакта C_u окрестностями $U_{\delta_i}(x_i)$, $i\leq k$. Тогда

$$\mathbf{E}\left(e^{n\phi(Z_n)}\right)\leq\sum_{i=1}^{k}\mathbf{E}\left(e^{n\phi(Z_n)};Z_n\in\overline{U_{\delta_i}(x_i)}\right)+e^{Mn}\mathbf{P}\left(|Z_n|\leq M, Z_n\notin\cup_{i=1}^k\overline{U_{\delta_i}(x_i)}\right)\leq$$
$$\sum_{i=1}^{k}e^{n(\phi(x_i)+\delta)}\mathbf{P}\left(Z_n\in\overline{U_{\delta_i}(x_i)}\right)+e^{Mn}\mathbf{P}\left(|Z_n|\leq M, Z_n\notin\cup_{i=1}^k\overline{U_{\delta_i}(x_i)}\right).$$

В силу ПБУ
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(e^{n(\phi(x_i)+\delta)}\mathbf{P}\left(Z_n\in\overline{U_{\delta_i}(x_i)}\right)\right)\leq\phi(x_i)+2\delta-\Lambda(x_i),$$
к тому же
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(e^{Mn}\mathbf{P}\left(|Z_n|\leq M, Z_n\notin\cup_{i=1}^k\overline{U_{\delta_i}(x_i)}\right)\right)\leq M-u,$$
Устремляя $u\to\infty$, $\delta\to 0$ имеем требуемое.
2) В случае неограниченной функции ϕ

$$\mathbf{E}\left(e^{n\phi(Z_n)}\right)\leq\mathbf{E}\left(e^{n\min(\phi(Z_n),M)}\right)+\mathbf{E}\left(e^{n\phi(Z_n)};\phi(Z_n)>M\right).$$

При этом
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{E}\left(e^{n\min(\phi(Z_n),M)};Z_n\leq M\right)\leq\sup(\min(\phi(\theta),M)-\Lambda(\theta))\leq\sup(\phi(\theta)-\Lambda(\theta))$$
и
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{E}\left(e^{n\phi(Z_n)};\phi(Z_n)>M\right)\to-\infty,$$
откуда и вытекает требуемое.

Лемма 11.3. Из условия
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{E}e^{\gamma n\phi(Z_n)}<\infty$$
при некотором $\gamma>1$ вытекает условие (1).

Доказательство Леммы 11.3. Положим $X_n=\exp((\phi(Z_n)-M)n)$. Тогда

$$e^{-Mn}\mathbf{E}\left(e^{\phi(Z_n)n};\phi(Z_n)\geq M\right)=\mathbf{E}(X_n;X_n\geq 1)\leq\mathbf{E}X_n^\gamma=e^{-\gamma Mn}\mathbf{E}e^{\gamma\phi(Z_n)n}.$$

Следовательно,
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{E}\left(e^{\phi(Z_n)n};\phi(Z_n)\geq M\right)=(1-\gamma)M+\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{E}e^{\gamma n\phi(Z_n)}.$$
Лемма, а значит и Теорема доказаны.

Верна и обратная теорема:

Теорема 11.2. Пусть семейство мер $\mathbf{P}(Z_n\in\cdot)$ экспоненциально плотно: для любого T найдется компакт K_ε т.ч.

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\ln\mathbf{P}(Z_n\notin K_\varepsilon)}{n}<-T.$$

Пусть для любой непрерывной функции $\phi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\mathbf{E}e^{n\phi(Z_n)}}{n}=f(\phi),$$

где f — некоторый функционал на множестве непрерывных функций. Тогда Z_n удовлетворяет ПБУ с $\Lambda=\sup_{\phi\in C}(\phi(x)-f(\phi))$.