Спецкурс "Большие уклонения"

Шкляев А.В.

4 декабря 2017 г.

Теорема Гартнера-Эллиса

Докажем нашу теорему. Для простоты будем доказывать для $D_R = \mathbb{R}^d$ (в этом случае условие существенной гладкости не требуется).
1) Получим оценку сверху, т.е. для любого замкнутого F покажем, что

$$\limsup \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in F) \leq -\inf_{\vec{\theta} \in F} \Lambda(\vec{\theta}).$$

1.1) Докажем оценку для компактного F. Для окрестности $U_\delta(\vec{\theta})$

$$\mathbf{P}(Z_n \in U_\delta(\vec{\theta})) \leq \mathbf{E} e^{(\vec{h}n, \vec{Z}_n)} \exp\left(-\inf_{\vec{y} \in U_\delta(\vec{\theta})} (\vec{h}, y)\right) \leq R_n(n\vec{h}) e^{-n(\vec{h}, \vec{x})} e^{\delta |\vec{h}| n}.$$

При любом $\varepsilon > 0$ для каждого $\vec{\theta} \in F$ найдутся $\delta = \delta(\vec{\theta})$, $\vec{h}$, такие что $\delta |\vec{h}| < \varepsilon$, $\Lambda(\vec{\theta}) \leq (\vec{\theta}, \vec{h}) - \ln R(\vec{h}) + \varepsilon$. Для каждой точки $\vec{\theta} \in F$ рассмотрим $U_{\delta(\vec{\theta})}(\vec{\theta})$. Тогда мы имеем покрытие компакта F такими окрестностями, из которого можно выбрать конечное подпокрытие, центры окрестностей которого мы назовем $\vec{\theta}_i$, $i \leq N$. Имеем

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in U_{\delta(\vec{\theta})}(\vec{\theta})) \leq 2\varepsilon - \Lambda(\vec{\theta}).$$

Рассмотрим покрытие компакта F открытыми шарами с центрами $\vec{\theta}_i$ и радиусами $\delta(\vec{\theta}_i)$. Выбирая из него конечное подпокрытие, имеем

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in F) \leq 2\varepsilon - \inf_{\vec{\theta} \in F} \Lambda(\vec{\theta}).$$

Отсюда для компактного F имеем верхнюю оценку.
1.2) Получим ее для любого замкнутого множества F.
Как и прежде, нам нужно разобраться с оценками вероятностей $\mathbf{P}(Z_{n,i} > M)$, где $Z_{n,i}$ — i-я координата $\vec{Z}_n$, пользуясь соотношением

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n \in F) \leq \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in F \cap [-M, M]^n) + \mathbf{P}(\exists i : Z_{n,i} > M) + \mathbf{P}(\exists i : Z_{n,i} < -M)$$

В силу неравенства Маркова при $\vec{e}_i = (0, ...0, 1, 0, ...0)$

$$\mathbf{P}(Z_{n,i} > M) \leq \mathbf{E} e^{n Z_{n,i}} e^{-nM} = R_n(n\vec{e}_i) e^{-nM},$$

откуда

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(Z_{n,i} > M) \leq -M + \ln R(\vec{e}_i).$$

В силу произвольности M имеем требуемую оценку сверху аналогично тому, как это было сделано в многомерной теореме Крамера.
2) Докажем нижнюю оценку, т.е. для любого открытого G покажем, что

$$\liminf \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in G) \geq -\inf_{\vec{\theta} \in G} \Lambda(\vec{\theta}).$$

Как и прежде, достаточно доказать, что при любых $\vec{x}$ и всех достаточно малых δ

$$\liminf \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in U_\delta(\vec{x})) \geq -\Lambda(\vec{x}).$$

2.1) Допустим, что найдется супремум $\Lambda(\vec{x})$ достигается при некотором $\vec{h}$. Тогда $grad(\ln R(\vec{h})) = \vec{x}$ и

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n \in U_\delta(\vec{x})) = \int_{U_\delta(\vec{x})} \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in d\vec{y}) = e^{-n(\vec{h}, \vec{x})} R_n(n\vec{h}) \int_{U_\delta(\vec{x})} e^{-n(\vec{h}, \vec{y} - \vec{x})} \mathbf{P}(\vec{Z}_n^{(n\vec{h})} \in d\vec{y}) \geq e^{-n(\vec{h}, \vec{x})} R_n(n\vec{h}) e^{-|\vec{h}|\delta} \mathbf{P}(\vec{Z}_n^{(n\vec{h})} \in U_\delta(\vec{x})).$$

Раньше мы пользовались для оценки последней вероятности ЗБЧ, но теперь последовательность Z более сложная. Оценим ее снизу следующим образом:

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n^{(n\vec{h})} \in U_\delta(\vec{x})) = 1 - \mathbf{P}(\vec{Z}_n^{(n\vec{h})} \notin U_\delta(\vec{x})) \geq 1 - \left(\sum_{i=1}^{d} \left(\mathbf{P}(\vec{Z}_{n,i}^{(n\vec{h})} - x_i > \delta d^{-1/2}) + \mathbf{P}(\vec{Z}_{n,i}^{(n\vec{h})} - x_i < -\delta d^{-1/2})\right)\right).$$

В силу неравенства Маркова при любом $\tilde{h} > 0$

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_{n,i}^{(n\vec{h})} - x_i > \delta d^{-1/2}) \leq \frac{\mathbf{E} e^{n\tilde{h} Z_{n,i}^{(n\vec{h})}}}{e^{n\tilde{h}(x_i + \delta d^{-1/2})}} = \frac{R_n(n(\tilde{h}\vec{e}_i + \vec{h}))}{R_n(n\vec{h}) e^{n\tilde{h}(x_i + \delta d^{-1/2})}}$$

и
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(\vec{Z}_{n,i}^{(n\vec{h})}-x_i>\delta d^{-1/2})\le\ln R(\tilde{h}\vec{e}_i+\vec{h})-\ln R(\vec{h})-\tilde{h}x_i+\delta d^{-1/2}.$$

Но $\ln R(\tilde{h}\vec{e}_i+\vec{h})-\ln R(\vec{h})-(e_i, grad\ln R(\vec{h}))\tilde{h}=o(\tilde{h})$, откуда при достаточно малом $\tilde{h}$ величина $\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(\vec{Z}_{n,i}^{(n\vec{h})}-x_i>\delta d^{-1/2})$ отрицательна, а значит $\mathbf{P}(\vec{Z}_n^{(n\vec{h})}\in U_\delta(\vec{x}))\to 1$, $n\to\infty$. Таким образом,

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(\vec{Z}_n\in U_\delta(\vec{x}))\ge\Lambda(\vec{x})-|\vec{h}|\delta,$$

откуда в силу произвольности δ имеем требуемое.
2.2) Как и в теореме Крамера предположим, что супремум в определении Λ недостижим. Тогда рассмотрим $\vec{X}_n=\vec{Y}_n+\vec{Z}_n$, $\vec{Y}_n\sim\mathcal{N}(0,\mathbf{E}/(Mn))$ и не зависит от $\vec{Z}_n$, где M — некоторый параметр, E — единичная матрица. Тогда

$$\ln R_{\vec{X}_n}(n\vec{h})=\ln R_n(n\vec{h})+\frac{n}{2M}|\vec{h}|^2\ge\ln R_n(n\vec{h})$$

и
$$\ln\tilde{R}(\vec{h})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln R_{X_n}(n\vec{h})=\ln R(\vec{h})+\frac{n}{2M}|\vec{h}|^2\ge\ln R(h),\ \tilde{\Lambda}(\vec{\theta})\le\Lambda(\vec{\theta}),$$

где $\tilde{\Lambda}(\vec{\theta})=\sup_{\vec{h}}((\vec{\theta},\vec{h})-\ln\tilde{R}(\vec{h}))$. При этом $\ln R(\vec{h})\ge(\vec{h},\vec{\mu})$, где $\vec{\mu}=grad\ln R(\vec{0})$, существующий в силу дифференцируемости $\ln R$. , а значит
$$(\vec{h},\vec{x})-\ln\tilde{R}(\vec{h})\le(\vec{h},(\vec{x}-\vec{\mu}))-\frac{1}{2M}|\vec{h}|^2\to-\infty,$$

$h\to\infty$. Следовательно, супремум в $\tilde{\Lambda}(\vec{\theta})$ достижим в конкретной точке $\vec{h}$, удовлетворяющей условию $\vec{x}=grad\ln\tilde{h}(\vec{h})$.
В силу 2.1)
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(\vec{X}_n\in U_{\delta/2}(\vec{x}))\ge-\tilde{\Lambda}(\vec{x})\ge-\Lambda(\vec{x}).$$

При этом
$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n\in U_\delta(\vec{x}))\ge\mathbf{P}(\vec{X}_n\in U_{\delta/2}(\vec{x}))-\mathbf{P}(|\vec{Y}_n|>\delta/2).$$

Модуль вектора больше $\delta/2$ только если одна из координат больше по модулю $\delta/(2\sqrt{d})$. Значит

$$\mathbf{P}(|\vec{Y}_n|>\delta/2)\le 2d\left(1-\Phi\left(\frac{\delta^2\sqrt{nM}}{2d}\right)\right).$$

В силу соотношения
$$\Phi(x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x^2/2},$$

имеем $\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}((Y_1+...+Y_n)/n>\delta/2))\le-M\delta^2/(2d)$. Аналогично рассуждениям пункта 1.2), отсюда следует требуемое утверждение.