Спецкурс "Большие уклонения"

Шкляев А.В.

18 октября 2017 г.

Принцип больших уклонений

Закончим доказательство теоремы Крамера
Теорема 5.1. (Крамера) Пусть S_n — случайное блуждание с $R(h) = \mathbf{E}e^{hX}$ (это матожидание всегда существует, возможно являясь бесконечным). Тогда меры $\mathbf{P}(S_n/n \in \cdot)$ удовлетворяют ПБУ с $\Lambda(x) = \sup_h(hx - \ln R(h))$.

Доказательство. 2) Докажем верхний принцип больших уклонений: для всех замкнутых F

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in F) \le -\inf_{x\in F} \Lambda(x).$$

Если $D_R = \{0\}$, то утверждение очевидно в силу того, что $\ln \mathbf{P}(S_n \in F) \le 0$, а $\Lambda = 0$ в силу Леммы 5.2. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда найдется $x \in D_R$, $x \ne 0$. При этом существует μ (возможно бесконечное).
Кроме того, если $\inf_{\theta\in F} \Lambda(\theta) = I_F = 0$, то утверждение очевидно. Поэтому рассмотрим случай $I_F > 0$.
Если $\mu = -\infty$, то функция Λ в силу Леммы 5.2 возрастает на всей прямой. При этом

$$\mathbf{P}(X_1 \ge x) \le \inf_{h\ge 0} \mathbf{E}e^{h(X_1-x)} = \inf_h e^{-(hx-\ln R(h))} = e^{-\Lambda(x)},$$

т.е. $\Lambda(x) \to 0$, $x \to \infty$. А раз $I_F > 0$, то $\inf F = a > -\infty$.
Остается заметить, что тогда

$$\mathbf{P}(S_n/n \in F) \le \mathbf{P}(S_n \ge an) \le \inf_h \exp(-(ah - \ln R(h))n) = \exp(-\Lambda(a)n),$$

что и требовалось доказать. Аналогично рассматривается $\mu = \infty$.
И, наконец, если μ конечно, то F не должно содержать μ (иначе $I_F = 0$, т.к. $\Lambda(\mu) = 0$). Значит в силу замкнутости, $\inf\{x > \mu, x \in F\} = x^+ > \mu$, $\sup\{x < \mu, x \in F\} = x^- < \mu$. Отсюда

$$\mathbf{P}(S_n/n \in F) \le \mathbf{P}(S_n \ge x^+ n) + \mathbf{P}(S_n \le x^- n) \le \exp(-\Lambda(x^+)n) + \exp(-\Lambda(x^-)n) \le 2\exp(-I_F n),$$

откуда прямо следует верхняя граница.

□

В случае размерности больше первой верна аналогичная теорема Крамера. Рассмотрим н.о.р. случайные векторы $X_i \in \mathbb{R}^d$, $\vec{S}_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Положим

$$R(\vec{h}) = \mathbf{E}e^{(\vec{h},\vec{X})},\ \vec{h} \in \mathbb{R}^d,\ \Lambda(\vec{\theta}) = \sup_{\vec{h}}((\vec{h},\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h})),\ \vec{\theta} \in \mathbb{R}^d.$$

Лемма 5.1. а) $\ln R$ — выпуклая дифференцируемая функция, Λ — выпуклая функция роста.
б) Если $\vec{\theta} = grad \ln R(\vec{h})$, то $\Lambda(\theta) = (\vec{h},\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h})$.
Доказательство пункта а) полностью повторяет доказательство для одномерного случая.
Для доказательства пункта b) будем действовать напрямую. Заметим, что

$$(\vec{h}_1,\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h}_1) = (\vec{h},\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h}) + (\vec{h}_1 - \vec{h},\vec{\theta}) - (\ln R(\vec{h}_1) - \ln R(\vec{h})) \ge (\vec{h},\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h}) - \left(\ln R(\vec{h}_1) - \ln R(\vec{h}) - grad \ln R(h)(\vec{h}_1 - \vec{h})\right).$$

В силу выпуклости $\ln R$ имеем требуемое.
Заметим также, что справедливо следующее неравенство: при любой функции f, т.ч. $\mathbf{E}f(\vec{X}) < \infty$, $f(\vec{X}) \ge 0$,

$$\mathbf{P}(\vec{X} \in A) \le \frac{\mathbf{E}f(\vec{X})}{\inf_{\vec{x}\in A} f(\vec{x})}.$$

Доказательство вытекает из неравенств

$$\mathbf{E}f(\vec{X}) \ge \mathbf{E}(f(\vec{X}); A) = \int_{\vec{x}\in A} f(\vec{x})\mathbf{P}(\vec{X} \in d\vec{x}) \ge \mathbf{P}(\vec{X} \in d\vec{x}) \inf_{\vec{x}\in A} f(\vec{x}).$$

Теорема 5.2. (Крамера, в $\mathbb{R}^d$) Пусть $\vec{S}_n$ — случайное блуждание шагами $X_i \in \mathbb{R}^d$ с $R(\vec{h}) = \mathbf{E}e^{(\vec{h},\vec{X})} < \infty$, $\vec{h} \in \mathbb{R}^d$. Тогда меры $\mathbf{P}(\vec{S}_n/n \in \cdot)$ удовлетворяют ПБУ с $\Lambda(\vec{x}) = \sup_{\vec{h}}((\vec{h},\vec{x}) - \ln R(\vec{h}))$.

Доказательство. Условие Крамера на всем $\mathbb{R}^d$ здесь, на самом деле, исключительно для удобства доказательства и может быть значительно ослаблено.

1) Докажем верхний принцип больших уклонений: для любого замкнутого F

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n \in F\right) \le -\inf_{\vec{\theta}\in F} \Lambda(\vec{\theta}).$$

1.1) Пусть F компакт. Заметим, что для любых $\vec{\theta}$, $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta = \delta(\vec{\theta}) > 0$, $\vec{h}$, такие что $\Lambda(\vec{\theta}) \le (\vec{\theta}, \vec{h}) - \ln R(\vec{h}) + \varepsilon$, $|\vec{h}|\delta < \varepsilon$. Тогда

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n \in U_\delta(\vec{\theta})\right) \le \frac{\mathbf{E}e^{\left(\vec{h}n, \frac{1}{n}\vec{S}_n\right)}}{\inf_{\vec{x}\in U_\delta(\vec{\theta})} e^{(\vec{h}n, \vec{X})}} = R(\vec{h})^n e^{-n(\vec{h},\vec{\theta})} e^{n|\vec{h}|\delta} \le e^{2n\varepsilon} e^{-\Lambda(\vec{\theta})n}.$$

Для каждой точки $\vec{\theta} \in F$ рассмотрим $U_{\delta(\vec{\theta})}(\vec{\theta})$. Тогда мы имеем покрытие компакта F такими окрестностями, из которого можно выбрать конечное подпокрытие, центры окрестностей которого мы назовем $\vec{\theta}_i$, $i \le N$. Имеем

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n \in F\right) \le e^{2n\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \exp(-\Lambda(\vec{\theta}_i)) \le N e^{2n\varepsilon} \exp(-\inf_{\vec{\theta}\in F} \Lambda(\vec{\theta})),$$

откуда

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n \in F\right) \le 2\varepsilon - \inf_{\vec{\theta}\in F} \Lambda(\vec{\theta}).$$

В силу произвольности Λ требуемое в 1.1) утверждение доказано.
1.2) Преположим, что F — произвольное замкнутое множество, рассмотрим $F_M = F \cap [-M, M]^n$. Тогда в силу 1.1)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n \in F_M\right) \le -\inf_{\vec{\theta}\in F} \Lambda(\vec{\theta}).$$

При этом

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\vec{S_n} \notin F_M\right) \le \sum_{i=1}^{d} \mathbf{P}(S_{n,i} \ge Mn) + \sum_{i=1}^{d} \mathbf{P}(S_{n,i} \ge Mn).$$

В силу теоремы Крамера для $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n^{(i)}/n > M) \le -\inf_{x>M} \Lambda^{(i)}(x),\ \ \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n^{(i)}/n < -M) \le -\inf_{x<-M} \Lambda^{(i)}(x).$$

Т.к. $D_{\Lambda^{(i)}} = \mathbb{R}$, то при $\mathbf{E}X^{(i)} \le M$ имеем $\inf_{x>M} \Lambda^{(i)}(x) = \Lambda^{(i)}(M)$. Но $\Lambda^{(i)}(M) = \sup(hM - \ln R(h)) \ge M - \ln R(1) \to \infty$, $M \to \infty$. Выберем M так, что $\Lambda^{(i)}(M) \ge \Lambda(\vec{\theta})$ при всех i. Тогда,

$$\mathbf{P}(\vec{S_n}/n \in F) \le \mathbf{P}(\vec{S_n}/n \in F_M) + \mathbf{P}(\vec{S_n}/n \notin [-M, M]^d) \le (2d+1) \exp\left(-n(\inf_{\vec{\theta}\in F} \Lambda(\vec{\theta}) - \varepsilon)\right),$$

откуда получаем требуемую оценку.
Нижний принцип больших уклонений будет доказан на следующей лекции. $\square$