Спецкурс "Большие уклонения"

Шкляев А.В.

11 октября 2017 г.

Принцип больших уклонений

Закончим доказательство леммы.
Лемма 2.1. 1) $\ln R$ выпукла, Λ выпуклая функция роста.
2) Если $D_R = \emptyset$, то $\Lambda(\theta) = 0$. Если $R(\tilde{h}) < \infty$ при некотором $\tilde{h} > 0$, то существует $\mu = \mathbf{E}X$ (возможно $\mu = -\infty$) и $\Lambda(\theta)$ при $\theta > \mu$ неубывает. Аналогично при $R(\tilde{h}) > -\infty$ при некотором $\tilde{h} < 0$, то существует $\mu = \mathbf{E}X$ (возможно $\mu = \infty$) и $\Lambda(\theta)$ при $\theta < \mu$ невозрастает. При этом $\Lambda(\mu) = 0$.
3) Во внутренних точках D_R $R(\cdot)$ дифференцируема и $R'(h) = \mathbf{E}X_1 e^{hX_1}$, $\Lambda'(\theta) = y$, где $\Lambda(\theta) = y\theta - \ln R(y)$.
Доказательство.
2) В силу неравенства Иенсена $\ln R(h) \le h\mathbf{E}X_1$, откуда вытекает существование $\mathbf{E}X$ и $\Lambda(\mu) = 0$. Докажем монотонность. Пусть μ конечно. Рассмотрим $\theta h - \ln R(h)$. При $\theta > \mu$ и $h < 0$ $h\theta - \ln R(h) \le h\mu - \ln R(h) \le 0$, т.е. супремум достигается на положительных h, а значит Λ монотонно возрастает по θ. Аналогично при $\theta < \mu$.
Пусть $\mu = -\infty$. Тогда $R(h) = \infty$ при $h < 0$, а значит супремум в $\Lambda(\theta)$ можно рассматривать при $h \ge 0$.

$$\Lambda(\theta_1) = \sup_{h \ge 0}(\theta_1 h - \ln R(h)) \le \sup_{h \ge 0}(\theta_2 h - \ln R(h))$$

при $\theta_1 \le \theta_2$, откуда Λ неубывает. Аналогично в противном случае. Отметим, что если μ не существует (ни конечного, ни бесконечного), то $R(h) = \infty$ при всех $h \ne 0$, откуда $\Lambda(\theta) = 0$.
3) Рассмотрим $h \in (0, h_1)$, где $R(h_1) < \infty$. Тогда

$$R'(h) = \lim_{\delta \to 0} \frac{R(h+\delta) - R(h)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \mathbf{E}\left(\frac{e^{\delta X} - 1}{\delta} e^{hX}\right).$$

Заметим, что

$$|e^x - 1| = |xe^{\theta(x)x}| \le |x|e^{|x|},\ \theta(x) \in [0,1]$$

в силу разложения в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Значит,

$$\left|\frac{e^{\delta X} - 1}{\delta}\right| \le |X|e^{|\delta||X|}.$$

Отсюда величины под знаком предела при любом $\varepsilon > 0$ мажорируются при $|\delta| < \varepsilon$

$$|X|e^{(h+\varepsilon)X} I_{X>0} + |X|e^{(h-\varepsilon)X} I_{X<0},$$

у которой конечное математическое ожидание. По теореме о мажорируемой сходимости

$$R'(h) = \mathbf{E}Xe^{hX}.$$

Теперь давайте покажем, что справедлива следующая теорема Крамера
Теорема 5.1. (Крамера) Пусть S_n — случайное блуждание с $R(h) = \mathbf{E}e^{hX}$ (это матожидание всегда существует, возможно являясь бесконечным). Тогда меры $\mathbf{P}(S_n/n \in \cdot)$ удовлетворяют ПБУ с $\Lambda(x) = \sup_h(hx - \ln R(h))$.

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа. 1) Докажем нижний принцип больших уклонений: для всех открытых G

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in G) \ge -\inf_{x \in G} \Lambda(x). \tag{1}$$

Покажем, что достаточно доказать что при любых $\delta > 0$, $x \in G$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in U_\delta(x)) \ge -\Lambda(x). \tag{2}$$

Действительно, если $I = \inf_{x \in G} \Lambda(x)$, то при любом ε найдется $y \in G : \Lambda(y) \le I + \varepsilon$. При этом при некотором $\delta > 0$ справедливо соотношение $U_\delta(y) \in G$. Тогда из (2) следует, что

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in G) \ge \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in U_\delta(y)) \ge -\Lambda(y) \ge -I - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε, имеем (1).
Более того, достаточно показать, что

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in U_\delta(0)) \ge -\Lambda(0) = \ln \sup_h R(h), \tag{3}$$

поскольку перейдя к $\tilde{S}_n = \tilde{X}_1 + ... + \tilde{X}_n = (X_1 - x) + ... + (X_n - x) = S_n - xn$ мы сведем (2) к (3).

- Пусть $R(h) < \infty$ при всех $h \in \mathbb{R}$, распределение величины X сосредоточено на $[-a, a]$, причем не сосредоточено на $[0, a]$ или $[-a, 0]$.
  Тогда при любом h
  $$\mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta, \delta)) \geq \int_{-\delta}^{\delta} \mathbf{P}(S_n/n \in dx) = R(h)^n \int_{-\delta}^{\delta} e^{-hxn} \mathbf{P}(S_n^{(h)}/n \in dx) \geq R(h)^n e^{-h(x+\delta)n} \mathbf{P}(S_n^{(h)}/n \in (-\delta, \delta)).$$
  При этом $R(h) \to \infty$, $|h| \to \infty$. Действительно, $\mathbf{E}e^{hX} \geq e^{h\varepsilon}\mathbf{P}(X > \varepsilon) \to \infty$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $h \to \infty$. Значит $\inf_{h \in \mathbb{R}} R(h) = R(\tilde{h})$ при некотором $\tilde{h}$, $R'(\tilde{h}) = 0$. При этом
  $$m(\tilde{h}) = \mathbf{E}X^{(\tilde{h})} = (\ln R(h))'_{h=\tilde{h}} = 0.$$
  В силу ЗБЧ $\mathbf{P}(S_n^{(\tilde{h})}/n \in (-\delta, \delta)) \to 1$, $n \to \infty$. Отсюда
  $$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta, \delta)) \geq -(\tilde{h}(x+\delta) - \ln R(\tilde{h})) + \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n^{(\tilde{h})}/n \in (-\delta, \delta)) \geq -\Lambda(x) - \tilde{h}\delta.$$
  В силу произвольности δ имеем требуемое.
- Пусть распределение не сосредоточено ни на $\mathbb{R}^+$, ни на $\mathbb{R}^-$. Фиксируем $M > 0$ и рассмотрим наши величины на отрезке $(-M, M)$, т.е. рассмотрим
  $$\mathbf{Q}_n((-\delta, \delta) := \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta, \delta)|X_i \in (-M, M), i \leq M) = \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta, \delta), X_i \in (-M, M), i \leq M)\mathbf{P}(X_1 \in (-M, M))^{-n}.$$
  Тогда
  $$\begin{aligned} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta, \delta)) &\geq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta, \delta), X_i \in (-M, M), i \leq M) \\ &\geq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{Q}_n(-\delta, \delta) - \ln \mathbf{P}(X_1 \in (-M, M)). \end{aligned}$$
  К мерам Q_n в силу пункта a) можно применить теорему и получить, что правая часть записанного тождества есть
  $$-\Lambda_M(0) - \ln \mathbf{P}(X_1 \in (-M, M)) = -\ln \inf(\mathbf{E}(e^{hX_1}|X_1 \in (-M, M))) - \ln \mathbf{P}(X_1 \in (-M, M))$$
  При $M \to \infty$ второе слагаемое стремится к 0. Покажем, что первое стремится к $-\ln \inf R(h)$. Действительно, если $\inf R(h) = I$, то при каждом $\varepsilon > 0$ найдется $\tilde{h}$: $R(\tilde{h}) \leq I + \varepsilon$. Но тогда
  $$R_M(\tilde{h}) = \mathbf{P}(X_1 \in (-M, M))^{-1}\mathbf{E}e^{hX_1} I_{X_1 \in (-M, M)} \to \mathbf{E}e^{hX_1} = R(h), \ M \to \infty$$
  по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Следовательно, $\inf R_M(h) \leq \inf R(h) + \varepsilon$ откуда и следует требуемое.
- Пусть распределение сосредоточено на одной из полуосей (для удобства на положительной). Тогда $R(h)$ монотонно возрастает, а значит
  $$\Lambda(0) = -\ln \inf_{h \in \mathbb{R}} R(h) = -\ln \lim_{h \to -\infty} R(h) = -\ln \mathbf{P}(X_1 = 0).$$
  Но
  $$\mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta, \delta)) \geq \mathbf{P}(X_1 = 0)^n,$$
  откуда вытекает требуемое.

□