1. Доказать, что

$$\sum_{k\le n:2|k} C_n^k = \sum_{k\le n:2\nmid k} C_n^k = 2^{n-1}.$$

2. Показать, что

$$\sum_{k=\max(0,n-N)}^{\min(n,M)} C_M^k C_N^{n-k} = C_{M+N}^n.$$

3. Найти

$$\sum_{i=0}^{t}\left(\frac{(r-1)!(r-2i)}{(r-i)!i!}\right)^2,$$

где $t=(r-2)/2$ при четных r и $t=(r-1)/2$.

4. Найти

$$\sum_{i=0}^{n} C_{m+i}^i 2^{-(m+i+1)} + \sum_{i=0}^{m} C_{n+i}^i 2^{-(n+i+1)}.$$

Указание. Найдите вероятность того, что к $m+1$-му выпадению орла на симметричной монете, выпадет ровно i решек.

5. Доказать, что $\sum_{k=0}^m C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ монотонно убывает по p.

6.

$$\sum_{k=[tn]}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \le \exp\left(-\left(t\ln\frac{t}{p} + (1-t)\ln\frac{(1-t)}{(1-p)}\right)\right).$$

7. Доказать, что если 10% сферы покрашено в красный цвет, а остальная часть в синий, то можно выбрать вписанный в сферу куб с синими вершинами.

8. В компании некоторые люди дружат друг с другом, число дружеских связей равно k. Показать, что компанию можно поделить на две группы, такие что число дружеских связей между группами не менее $k/2$.

9. Доказать, что существует несчетное число чисел из отрезка [0,1], таких что в них встречаются всевозможные конечные комбинации цифр.

10. Пусть G — граф без петель и повторных ребер, степени вершины v которого d_v. Назовем независимой компонентой графа такой набор вершин, что никакие две ребрами не соединены. Пусть d — размер наибольшей компоненты. Показать, что $d \ge \sum_{v\in G}\frac{1}{1+d_v}$.

11. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=\max(0,n-N)}^{\min(n,M)} k C_M^k C_N^{n-k}.$$

12. (ШАД,2014). Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n(n+1)},$$

где $f(n)$ — число 1 в двоичной записи числа n.

13. (Румынская национальная олимпиада). Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n} \frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{x_1+\dots+x_n}dx_1\dots dx_n.$$

Примеры и задачи

Начнем с такого показательного примера. Рассмотрим два утверждения:
1) Назовем число из отрезка $[0,1]$ хорошим, если сумма первых n его двоичных цифр, деленная на n, стремится к $1/2$. Тогда нехорошие числа имеют меру 0.
2) При бросании симметричной монеты доля числа орлов будет стремиться к $1/2$.

Это абсолютно одинаковые утверждения, называемые *усиленным законом больших чисел*. Между тем второе утверждение кажется нам интуитивно очевидным, а первое, возможно, даже неверным.

Для нас работа с вероятностями событий содержит некоторый интуитивный подтекст, который мы не всегда видим, работая непосредственно с комбинаторными коэффициентами, суммами и интегралами. Именно об этом мы сегодня и поговорим.

Вероятность и комбинаторика

1. Доказать, что
$$\sum_{k\le n:2|k} C_n^k = \sum_{k\le n:2\nmid k} C_n^k = 2^{n-1}.$$
Представим себе, что мы подбрасываем монету с вероятностью успеха $1/2$. Тогда вероятность того, что монета выпадет на орла k раз есть $C_n^k 2^{-n}$.
Следовательно, вероятность $\sum_{k\le n:2|k} C_n^k 2^{-n}$ есть вероятность четного числа орлов, а $\sum_{k\le n:2\nmid k} C_n^k 2^{-n}$ — вероятность нечетного числа орлов. Перевернем первую монету и рассмотрим вероятность четного числа орлов. Эта вероятность равна вероятности нечетного числа орлов в исходной задаче. С другой стороны, эта же вероятность равна вероятности четного числа орлов просто потому, что перевернутая монетка вероятностно не отличается от исходной монеты. Тем самым обе вероятности равны $1/2$.

2. Показать, что
$$\sum_{k=\max(0,n-N)}^{\min(n,M)} C_M^k C_N^{n-k} = C_{M+N}^n.$$
Рассмотрим $C_M^k C_N^{n-k}/C_{M+N}^n$. Эта величина соответствует вероятности выбора из $N+M$ цветных шаров, среди которых N белых и M черных, n шаров, среди которых k черных. Следовательно,
$$\sum_{k=\max(0,n-N)}^{\min(n,M)} \frac{C_M^k C_N^{n-k}}{C_{M+N}^n} = 1$$
как сумма вероятностей вытащить k шаров по всем k.

3. Найти
$$\sum_{i=0}^{t} \left(\frac{(r-1)!(r-2i)}{(r-i)!i!}\right)^2,$$
где $t=(r-2)/2$ при четных r и $t=(r-1)/2$.

4. Найти
$$\sum_{i=0}^{n} C_{m+i}^i 2^{-(m+i+1)} + \sum_{i=0}^{m} C_{n+i}^i 2^{-(n+i+1)}.$$
Указание. Найдите вероятность того, что к $m+1$-му выпадению орла на симметричной монете, выпадет ровно i решек.

5. Доказать, что $\sum_{k=0}^m C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ монотонно убывает по p.
Можно решить эту задачу с помощью производной, но можно решить ее элементарно. Рассмотрим $p<p'$. Тогда нам нужно доказать, что вероятность того, что при n подбрасываниях монетки с вероятностью орла p будет не более m орлов меньше, чем та же вероятность для монетки с вероятностью орла p'. Интуитивно это достаточно очевидно, но давайте докажем строго. Давайте предположим, что у меня

есть трехгранная "монетка", которая с вероятностью p выпадает на грань 1, с вероятностью $p' - p$ на грань 2 и с $1 - p'$ на грань 3. Тогда вероятность, что монетка с вероятностью p за n бросков дала не более m орлов есть вероятность того, что у трехгранной монетки за n бросков было не более m граней 1. Вероятность того, что монетка с вероятность p' за n бросков дала не более m орлов есть вероятность того, что у трехгранной монетки за n бросков было не более m граней 1 и 2 в сумме. Вторая вероятность меньше просто потому, что включает в себя все исходы из первой и еще что-то.

Простые вероятностные неравенства, например, неравенство Маркова

$$P(X \geq x) \leq \frac{EX}{x},$$

где $X \geq 0$, EX — математическое ожидание, также дают довольно содержательные комбинаторные оценки. Примером может служить так называемое энтропийное неравенство:

6.

$$\sum_{k=[tn]}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \leq \exp\left(-\left(t \ln \frac{t}{p} + (1-t) \ln \frac{(1-t)}{(1-p)}\right)\right).$$

Математические ожидания

Математическим ожиданием случайной величины X, принимающей значения $x_1,..,x_k$ с вероятностями $p_1,...,p_k$ называют

$$EX = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i.$$

При этом математическое ожидание линейно: если X_i — случайные величины, то

$$E(X_1 + ... + X_n) = EX_1 + ...EX_n.$$

Кроме того, верна такая полезная формула

$$Ef(X) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i) p_i /$$

Математическим ожиданием случайной величины X с плотностью $f(x)$ называют

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

При этом математическое ожидание также линейно.

7. Доказать, что если 10% сферы покрашено в красный цвет, а остальная часть в синий, то можно выбрать вписанный в сферу куб с синими вершинами.
Доказательство: выберем случайный куб и найдем математическое ожидание числа вершин, которые оказались синими. Пронумеруем вершины в каком-то порядке и заметим, что число синих вершин X есть сумма по каждой из 8 вершин куба случайных величин Y_i, $Y_i = 1$, если вершина i синяя и $Y_i = 0$, если вершина i красная. Тогда

$$EX = EY_1 + ... + EY_8 = 8 \cdot \frac{9}{10} = \frac{72}{10} > 7.$$

Следовательно, у случайного куба в среднем больше 7 синих вершин. Значит существует куб, у которого синих вершин 8.

8. В компании некоторые люди дружат друг с другом, число дружеских связей равно k. Показать, что компанию можно поделить на две группы, такие что число дружеских связей между группами не менее $k/2$.

Наберем группы по случайному принципу — будем выбирать каждого человека и отправлять его в первую группу G с вероятностью $1/2$ и во вторую с той же вероятностью. Подсчитаем математическое ожидание числа X связей между группами. Для этого представим X в $\sum_{i<j} Y_{i,j}$, где i, j — номера людей, $Y_{i,j}$ — 1, если i, j лежат в разных группах и дружат и 0 иначе. Тогда

$$EX = \sum_{i<j} EY_{i,j},$$

где $Y_{i,j} = 0$, если i, j не дружат и $Y_{i,j} = 1$ с вероятностью $1/2$, если i, j дружат. Тогда $EX = k/2$, откуда найдется такое разбиение, что число дружеских связей между группами не менее $k/2$.

9. Доказать, что существует несчетное число чисел из отрезка [0,1], таких что в них встречаются всевозможные конечные комбинации цифр.

10. Пусть G — граф без петель и повторных ребер, степени вершины v которого d_v. Назовем независимой компонентой графа такой набор вершин, что никакие две ребрами не соединены. Пусть d — размер наибольшей компоненты. Показать, что $d \geq \sum_{v \in G} \frac{1}{1+d_v}$.

11. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=\max(0,n-N)}^{\min(n,M)} kC_M^k C_N^{n-k}.$$

12. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)},$$

где $f(n)$ — число 1 в двоичной записи числа n. Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Значит можно рассматривать нашу сумму как $Ef(X)$, где $P(X = n) = 1/(n(n+1))$. При этом

$$f(X) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i,$$

где Y_i — единичка, если i-ая с конца цифра единичка, и 0 иначе. Тогда

$$Ef(X) = \sum_{i=1}^{\infty} EY_i.$$

Вообще говоря, бесконечную сумму переставлять с матожиданием нехорошо, но можно это делать, в частности, для рядов из положительных величин.

Остается найти EY_i, равную вероятности того, что i-ая цифра X равна 1. Давайте просто берем подходящие X:

$$EY_i = P(X = \underbrace{10...0}_{i}) + P(X = \underbrace{10...1}_{i}) + ... + P(X = 1\underbrace{1...1}_{i}) + P(X = 1\underbrace{10...0}_{i}) + ... + P(X = 1\underbrace{11...1}_{i}) + ...$$

Посмотрим на каждый такой блок

$$P(X=i_1...i_l\underbrace{10...0}_{i})+...+P(X=i_1...i_l\underbrace{11...1}_{i})=\frac{1}{i_1...i_l\underbrace{10...0}_{i}}-\frac{1}{i_1...i_l\underbrace{10...1}_{i}}+$$

$$\frac{1}{i_1...i_l\underbrace{10...1}_{i}}-\frac{1}{i_1...i_l\underbrace{10...2}_{i}}+...+\frac{1}{i_1...i_l\underbrace{11...1}_{i}}-\frac{1}{1+i_1...i_l\underbrace{11...1}_{i}}=\frac{1}{i_1...i_l\underbrace{10...0}_{i}}-\frac{1}{i_1...i_l\underbrace{11...1}_{i}+1}.$$

Но тогда, суммируя по всем таким блокам, мы получим

$$EY_i=\frac{1}{\underbrace{10...0}_{i}},\ EY=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\underbrace{10...0}_{i}}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i-1}}=2.$$

И под конец для более опытных читателей (владеющих такими понятиями как сходимость почти наверное, лемма о мажорируемой сходимости, закон больших чисел) еще одна задача из этой области:

13. (Румынская национальная олимпиада). Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\int_0^1...\int_0^1}_{n}\frac{x_1^2+...+x_n^2}{x_1+...+x_n}dx_1....dx_n.$$