Большие уклонения для ветвящегося процесса в случайной среде

Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ...)$ — последовательность н.о.р. сл.в., $\{f_y\}, y \in \mathbb{R}$ — набор производящих функций. Рассмотрим последовательность $X_{n,i}$ сл.в., таких что

а) при любом n они условно независимы при условии $\boldsymbol{\eta}$ и о.р. с условной производящей функцией f_{η_n}.

б) при различных n величины независимы.

Ветвящимся процессом Z_n *в случайной среде* $\boldsymbol{\eta}$ называется последовательность $Z_0 = 1$,

$$Z_{n+1} = X_{n+1,1} + ... + X_{n+1,Z_n}$$

при $Z_n > 0$ и $Z_{n+1} = 0$ при $Z_n = 0$.

Мы будем изучать асимптотику вероятностей $\mathbf{P}(\ln Z_n \in [x, x + \Delta_n))$.

Для этого положим $\xi_i = \ln f'_{\eta_i}(1)$, $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Отметим, что $\mathbf{E}(Z_n|\boldsymbol{\eta}) = e^{S_n}$.

Потребуем следующие условия:

1) $\mathbf{E}\xi_1 < \infty$, $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi_1} < \infty$, $h \in [0, h^+)$.

2) $\mathbf{E}X_{n,1}^{\tilde{h}} < \infty$ при некотором $\tilde{h} > 1$ (то есть при всех $h \leq \tilde{h}$).

3) Величина ξ нерешетчата.

Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 21.1.

1) Пусть $\mu > 0$. Тогда соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \in [x, x + \Delta_n)) \sim I\left(\frac{x}{n}\right)\mathbf{P}(S_n \in [x, x + \Delta_n)) \sim \frac{I\left(\frac{x}{n}\right)\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})}\exp(-\Lambda(x/n)n),\ n \to \infty, \qquad (1)$$

выполнено равномерно по $x \in [\mu, \theta_2] \subset [\mu, m^+)$, где

$$I(m(h)) = \lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{E}Z_k^h}{R(h)^k}.$$

2) Пусть $\mu = 0$. Тогда соотношение (1) выполнено равномерно мало по $x \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$.

3) Пусть $\mu < 0$. Тогда соотношение (1) выполнено равномерно мало по $x \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\tilde{\gamma}, m^+)$, где $\tilde{\gamma} = m(\tilde{\varkappa})$, где $\tilde{\varkappa} > 1 : R(\tilde{\varkappa}) = R(1)$.

Замечание. Отметим, что в случае 3) рассматривается более маленький промежуток $(\tilde{\gamma}, m^+)$ чем (γ, m^+) в теореме 19.1, поскольку условия 2)-5) выполнены не на всем промежутке (γ, m^+). Однако в силу замечания к теореме 19.1 нам это и не требуется.

Доказательство Теоремы 21.1.

Для доказательства представим ветвящийся процесс в виде рекуррентной последовательности:

$$Z_{n+1} = e^{\xi_{n+1}}Z_n + B_n,\ B_n = Z_{n+1} - e^{\xi_{n+1}}Z_n.$$

Проверим, что для этой последовательности выполнены условия Теоремы 19.1.

Условия 1), 3), 4) выполнены очевидно. Условие 6) вытекает из теоремы о сходимости мартингалов, поскольку $Z_n e^{-S_n}$ неотрицательный мартингал. Проверим условия 2) и 5).

Первая половина условия 2) выполнена по условию. Проверим вторую с помощью следующего утверждения:

Лемма 21.1. Пусть T_n — мартингал. Тогда при $h \in [1, 2]$

$$\mathbf{E}|T_n|^h \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E}|T_i - T_{i-1}|^h;$$

при $h \geq 2$

$$\mathbf{E}|T_n|^h \leq n^{h/2-1}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}|T_i - T_{i-1}|^h.$$

а) При $h \leq 1 + \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$ (такое бывает только в случаях 1)-2), поскольку $h_{x/n} > \tilde{\varkappa} > 1$) воспользуемся тем, что

$$\mathbf{E}\left(\left|\frac{Z_{n+1}}{e^{S_{n+1}}} - \frac{Z_n}{e^{S_n}}\right|^h \middle| \boldsymbol{\eta}\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\left|\frac{Z_{n+1}}{e^{S_{n+1}}} - \frac{Z_n}{e^{S_n}}\right|^h \middle| Z_n, \boldsymbol{\eta}\right)\middle| \boldsymbol{\eta}\right) \leq \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\left|\frac{Z_{n+1}}{e^{S_{n+1}}} - \frac{Z_n}{e^{S_n}}\right|^{\tilde{h}} \middle| Z_n, \boldsymbol{\eta}\right)\middle| \boldsymbol{\eta}\right)^{h/\tilde{h}}.$$

Воспользуемся Леммой 1, считая, что $\tilde{h} \in [1, 2]$:

$$\mathbf{E}\left(\left|\frac{Z_{n+1}}{e^{S_{n+1}}} - \frac{Z_n}{e^{S_n}}\right|^{\tilde{h}} \middle| Z_n, \boldsymbol{\eta}\right) = \mathbf{E}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{Z_n}\left(X_{n+1,i} - e^{\xi_{n+1}}\right)}{e^{S_{n+1}}}\right|^{\tilde{h}} \middle| Z_n, \boldsymbol{\eta}\right) \leq \frac{Z_n}{e^{S_{n+1}\tilde{h}}}\mathbf{E}\left(\left|X_{n+1,1} - e^{\xi_{n+1}}\right|^{\tilde{h}} \middle| \eta_{n+1}\right).$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}|B_n|^h = \mathbf{E}\left(e^{S_{n+1}h}\mathbf{E}\left(\left|\frac{Z_{n+1}}{e^{S_{n+1}}} - \frac{Z_n}{e^{S_n}}\right|^h \middle| \boldsymbol{\eta}\right)\right) \leq \mathbf{E}e^{S_n h/\tilde{h}} = R(h/\tilde{h})^n.$$

Но тогда, полагая

$$\ln R(h) - \ln R(h/\tilde{h}) \geq (h - h/\tilde{h}) m(h/\tilde{h}) = h\left(1 - \frac{1}{\tilde{h}}\right)\theta_1 =: \delta h,$$

и $c = \sup_{h\in[h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]}\left(\mathbf{E}\left|X_{n+1,1} - e^{\xi_{n+1}}\right|^{\tilde{h}}\right)^{h/\tilde{h}}$, имеем второе утверждение условия 2) теоремы 19.1.
b) При $h \in [1+\varepsilon, 2]$

$$\mathbf{E}\left(\frac{|B_n|^h}{e^{S_{n+1}h}}\middle|\boldsymbol{\eta}\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\left|\frac{Z_{n+1}}{e^{S_{n+1}}} - \frac{Z_n}{e^{S_n}}\right|^h \middle| Z_n, \boldsymbol{\eta}\right)\middle|\boldsymbol{\eta}\right) \leq \frac{\mathbf{E}(Z_n|\boldsymbol{\eta})}{e^{S_{n+1}h}}\mathbf{E}\left(\left|X_{n+1,1} - e^{\xi_{n+1}}\right|^h\middle|\eta_{n+1}\right).$$

Аналогично предыдущему пункту имеем оценку

$$\mathbf{E}|B_n|^h \leq \mathbf{E}\left(\left|X_{n+1,1} - e^{\xi_{n+1}}\right|^h\right) R(1)^n.$$

При этом при $m(1) > 0$

$$\ln R(h) - \ln R(1) \geq m(1)(h-1) \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} h m(1) =: \delta h,$$

а при $m(1) \leq 0$ (что возможно только в случае 3))

$$\ln R(h) - \ln R(1) = \ln R(h) - \ln R(\tilde{\varkappa}) \geq m(1)(h - \tilde{\varkappa}) \geq \frac{h_{\theta_1} - \tilde{\varkappa}}{h_{\theta_1}} h m(\tilde{\varkappa}) =: \delta h.$$

c) Пусть $h \in [2^k, 2^{k+1}]$, $k \geq 1$.
Будем доказывать индукцией по k, что выполнено условие 2) Теоремы 19.1 и $\mathbf{E}Z_n^h \leq P(h,n)R(h)^n$, где $P(h,n)$ — некоторый многочлен от n, чьи коэффициенты равномерно ограничены по рассматриваемым h. База для $k=0$ доказана.
Докажем переход. Аналогично предыдущему

$$\mathbf{E}\left(\frac{|B_n|^h}{e^{S_{n+1}h}}\middle|\boldsymbol{\eta}\right) \leq \frac{\mathbf{E}\left(Z_n^{h/2}\middle|\boldsymbol{\eta}\right)}{e^{S_{n+1}h}}\mathbf{E}\left(\left|X_{n+1,1} - e^{\xi_{n+1}}\right|^h\middle|\eta_{n+1}\right).$$

По предположению индукции получаем, что

$$\mathbf{E}|B_n|^h \leq \mathbf{E}\left(\left|X_{n+1,1} - e^{\xi_{n+1}}\right|^h\right) R(h/2)^n P(h/2, n),$$

то есть условие 2) Теоремы 19.1 выполнено, поскольку $P(h/2,n) \leq e^{\delta h n/2}$ при любом δ и достаточно большом n.
При этом

$$\mathbf{E}\left(\left(\frac{Z_n}{e^{S_n}} - 1\right)^h\middle|\boldsymbol{\eta}\right) \leq n^{h/2-1}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\left(\frac{Z_i}{e^{S_i}} - \frac{Z_{i-1}}{e^{S_{i-1}}}\right)^h\middle|\boldsymbol{\eta}\right),$$

откуда по неравенству Минковского

$$\left(\mathbf{E}Z_n^h\right)^{1/h} \leq \left(n^{h/2-1}\sum_{i=1}^n R(h)^{n-i}R(h)^i c e^{-\delta h i}\right)^{1/h} + R(h)^{n/h} \leq R(h)^{n/h}\left(\left(\frac{cn^{h/2-1}}{1-e^{-\delta h}}\right)^{1/h} + 1\right),$$

а значит

$$\mathbf{E}Z_n^h \leq R(h)^n\left(\left(\frac{cn^{h/2-1}}{1-e^{-\delta h}}\right)^{1/h} + 1\right)^{[h]+1} \leq R(h)^n\left(\frac{c^{1/h}n}{\left(1-e^{-\delta h}\right)^{1/h}} + 1\right)^{[h]+1},$$

что и требовалось. Условие 2) выполнено.
Проверим условие 5). Рассмотрим произвольное событие A и заметим, что по неравенству Гельдера

$$\mathbf{E}\left(\left(\frac{Z_k}{e^{S_k}}\right)^h I_A\middle|\boldsymbol{\eta}\right) \leq \left(\mathbf{E}\left(\frac{Z_k}{e^{S_k}}\middle|\boldsymbol{\eta}\right)\right)^h (\mathbf{P}(A|\boldsymbol{\eta}))^{1-h} = (\mathbf{P}(A|\boldsymbol{\eta}))^{1-h}.$$

Следовательно, при $h \leq \tilde{\varepsilon}$ и любом t

$$\mathbf{E}\frac{Z_k^h}{e^{hS_k}} I_{Z_k e^{-S_k} > t} \leq \mathbf{P}(Z_k e^{-S_k} > t)^{1-\tilde{\varepsilon}}. \tag{2}$$

Величины $Z_k e^{-S_k}$ сходятся слабо, а следовательно порожденные ими меры образуют плотное семейство, а значит при некотором t и всех k правая часть (1) может быть сделана сколь угодно малой. Что и требовалось доказать.