Большие уклонения решения рекуррентного уравнения

Рассмотрим следующую задачу. Пусть

$$Y_{k+1} = A_k Y_k + B_k,$$

где A_k — н.о.р. положительные невырожденные величины, а B_k возможно разнораспределены и зависимы, но B_k независимо от $A_{k+1}, ..., A_n$ при любом k.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) Величины $\xi_{k+1} = \ln A_k$ имеют конечное мат. ожидание $\mathbf{E}\xi_i = \mu$ и удовлетворяют правостороннему условию Крамера

$$R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi_1} < \infty, \ h \in [0, h^+);$$

2) Величины B_k таковы, что $\mathbf{E}|B_k|^h < \infty$ при всех k, $h \in [0, h^+)$. Более того, потребуем, чтобы при некотором c

$$\mathbf{E}|B_k|^h < ce^{-\delta hk} R(h)^k$$

для любых $h_1, h_2 \in [0, h^+)$ при некотором $\delta > 0$ и всех $k, h \in [h_1, h_2]$;

3) Величина Y_0 такова, что $\mathbf{E}|Y_0|^h < \infty$, $h \in [0, h^+)$;

4) Величины B_k, Y_0 не сосредоточены на отрицательной полуоси.

5) Интегралы $\mathbf{E}^{(h)} \left(\frac{Y_k}{e^{S_k}}\right)^h$ сходятся равномерно по $h \in [0, \tilde{\varepsilon}]$ при некотором $\tilde{\varepsilon} > 0$ и всех k.

6) $Y_n e^{-S_n}$ сходится п.н.

Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 19.1.

1) Пусть $\mu > 0$. Тогда соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x, x+\Delta_n)) \sim I\left(\frac{x}{n}\right) \mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) \sim \frac{I\left(\frac{x}{n}\right)\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp(-\Lambda(x/n)n), \ n \to \infty, \tag{1}$$

выполнено равномерно по $x \in [\mu, \theta_2] \subset [\mu, m^+)$, где

$$I(m(h)) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{E}(Y_k^+)^h}{R(h)^k}, \ Y_k^+ = \max(Y_k, 0).$$

2) Пусть $\mu = 0$. Тогда соотношение (1) выполнено равномерно мало по $x \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$.

3) Пусть $\mu < 0$. Тогда соотношение (1) выполнено равномерно мало по $x \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\gamma, m^+)$.

Замечание. В действительности не требуется, чтобы условия 2)-5) выполнялись при всех $h \in [0, h^+)$, достаточно, чтобы они были выполнены при h из некоторого полуинтервала $[\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$, содержащего $[h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$.

Доказательство Теоремы 19.1.

Разберемся сначала с тем, почему указанное $I(u)$ вообще определено и покажем, что указанная в нем сходимость равномерна по $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$.

Действительно, заметим, что

$$R(h_u)^{-k}\mathbf{E}(Y_k^+)^{h_u} = \mathbf{E}^{(h_u)}\left(\frac{Y_k^+}{e^{S_k}}\right)^{h_u}.$$

Мы рассмотрим только случай $h > \tilde{\varepsilon} > 0$, поскольку при $h \in [0, \tilde{\varepsilon}]$ требуемое соотношение верно в силу условия 5) . Действительно, $Y_n e^{-S_n}$ сходится п.н. в силу 6). При этом $Y_n e^{-S_n} I_{|Y_n e^{-S_n}| \le t}$ при любом t сходится в $L^h(\mathbf{P}^{(h)})$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. В силу равномерной интегрируемости

$$\left|\mathbf{E}\left(\frac{Y_n^+}{e^{S_n}}\right)^h - \mathbf{E}\left(\frac{Y_n^+}{e^{S_n}}\right)^h I_{|Y_n e^{-S_n}| \le t}\right| \le \varepsilon$$

при достаточно большом t. Из этих двух фактов вытекает требуемая сходимость и ее равномерность.

Докажем, что при $h \in [\tilde{\varepsilon}, h_{\theta_2}]$ последовательность $\frac{Y_k}{e^{S_k}}$ фундаментальна в $L^h(\mathbf{P}^{(h)})$, причем равномерно по рассматриваемым h. Действительно, при $k > l$, $h \in [\tilde{\varepsilon}, 1]$

$$\mathbf{E}^{(h)}\left|\frac{Y_k}{e^{S_k}} - \frac{Y_l}{e^{S_l}}\right|^h = \mathbf{E}^{(h)}\left|\sum_{i=l+1}^k B_{i-1}e^{-S_i}\right|^h = R(h)^{-k}\mathbf{E}\left|\sum_{i=l+1}^k B_{i-1}e^{-S_i}\right|^h \le c\sum_{i=l+1}^k e^{-\delta ih},$$

где мы воспользовались неравенством $|\sum_{i=1}^n a_i|^h \le \sum_{i=1}^n |a_i|^h$ при $h \le 1$. При $h \ge 1$ фундаментальность доказывается аналогично с помощью неравенства Минковского

$$\left(\left|\sum_{i=1}^n a_i\right|^h\right)^{1/h} \le \sum_{i=1}^n \left(|a_i|^h\right)^{1/h}.$$

Из фундаментальности предел существует, из равномерной ограниченности приращений по h сходимость к нему равномерна по h.
Перейдем к доказательству теоремы. Для удобства положим $B_{-1} = Y_0$, тогда

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n} B_{i-1} e^{S_n - S_i}. \tag{2}$$

Проведем оценку (1) сверху и снизу.
1) Фиксируем $\alpha, \beta \in [0,1]$ и оценим рассматриваемое выражение сверху величиной

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right| \geq \delta_n \exp(x)\right) + \mathbf{P}\left(\ln\left(\sum_{i=0}^{[n^\alpha]} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right) \in [x - \ln\delta_n, x + \Delta_n + \ln\delta_n)\right), \tag{3}$$

где δ_n — некоторая последовательность, стремящаяся к 0 быстрее чем Δ_n.
1.1) Первая вероятность в (3) оценивается сверху величиной

$$\mathbf{P}(\exists n^\alpha \leq i \leq n : S_n - S_i + \ln|B_{i-1}| \geq x + \ln\delta_n - \ln n) \leq \sum_{i=n^\alpha}^{n} \mathbf{P}(S_n - S_i + \ln|B_{i-1}| \geq x - n^\beta) \leq$$

$$\sum_{i=n^\alpha}^{n} \mathbf{E}|B_{i-1}|^h R(h)^{n-i} e^{-h(x-n^\beta)} \leq c e^{-(h_{x/n}\frac{x}{n} - \ln R(h_{x/n}))n} n e^{-\delta h n^\alpha} e^{(\ln R(h) - \ln R(h_{x/n}))n} e^{(h_{x/n} - h)x} e^{hn^\beta}$$

при любом $h \in [0, h^+)$, любом $\beta > 0$ и δ_n, стремящихся к 0, медленнее чем e^{-n^β}. Положим $h = h_{x/n} + n^{-\tau}$, $\tau > 0$, и заметим, что

$$\ln R(h) = \ln R(h_{x/n}) + \frac{x}{n} n^{-\tau} + \frac{1}{2}\sigma^2(\tilde{h}) n^{-2\tau} + o(n^{-1})$$

при некотором $\tilde{h} \in [h_{x/n}, h]$, откуда первое слагаемое (3) оценивается сверху величиной

$$e^{-\Lambda(x/n)n} n e^{-\delta n^{\alpha-\tau}} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(\tilde{h}) n^{1-2\tau}} e^{hn^\beta}.$$

При $\alpha = 3/5$, $\tau = 3/7$, $\beta = 1/10$, получаем что

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} B_{i-1} e^{S_n - S_i} \geq \delta_n \exp(x)\right) = o(1)\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(x/n)n}.$$

1.2) Докажем, что

$$\mathbf{P}\left(\ln\left(\sum_{i=0}^{n^\alpha} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right) \in [x, x + \Delta_n)\right) \leq (1+\varepsilon) I\left(\frac{x}{n}\right) \mathbf{P}(S_n \in [x, x + \Delta_n)) \tag{4}$$

при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n, причем равномерно по указанным x. Тогда верхняя оценка будет доказана, поскольку

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x + \Delta_n)) \sim \mathbf{P}(S_n \in [x - \delta_n, x + \Delta_n + \delta_n)),$$

а I непрерывная функция.
Величина в левой части (4) представима в виде

$$\mathbf{P}(\ln\left(Y_{[n^\alpha]} e^{S_{n-[n^\alpha]}}\right) \in [x, x + \Delta_n)) \leq \int_{x - \theta_2' n}^{x - \mu_0(n - n^\alpha) + \sqrt{n}} \mathbf{P}(S_{n-[n^\alpha]} \in [x - y, x + \Delta_n - y)) \mathbf{P}(\ln Y_{[n^\alpha]} \in dy) + \tag{5}$$

$$\mathbf{P}(\ln Y_{[n^\alpha]} \geq x - \mu_0 n + \sqrt{n}) + \mathbf{P}(S_{n-[n^\alpha]} \geq \theta_2' n)$$

при любом $\theta_2' \in [\theta_2, m^+)$, где $\mu_0 = \max(\mu, 0)$.
Оценим второе слагаемое (5), пользуясь неравенством Маркова с $h = h_{x/n} + n^{-2/3}$,

$$\mathbf{P}(S_{n-[n^\alpha]} \geq \theta_2' n) \leq R(h)^{n-n^\alpha} e^{-h\theta_2' n} \leq R(h_{x/n})^n e^{-h_{x/n} x} e^{(\ln R(h) - \ln R(h_{x/n}))n - n^{-2/3}\theta_2'(n - n^\alpha)}.$$

При этом $\ln R(h) - \ln R(h_{x/n}) = x n^{-5/3} + o(n^{-1})$, откуда

$$\mathbf{P}(S_{n-[n^\alpha]} \geq \theta_2' n) = o(1)\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(x/n)n}.$$

Аналогично оценивается третье слагаемое (5)

$$\mathbf{P}(\ln Y_{[n^\alpha]} \geq x - \mu_0(n - n^\alpha) + \sqrt{n}) \leq \mathbf{P}(\exists i : S_{[n^\alpha]-i} + \ln|B_{i-1}| \geq x - \mu_0(n - n^\alpha) + \sqrt{n} - \ln n) \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(S_{[n^\alpha]-i} + \ln|B_{i-1}| \geq x - \mu_0 n + \sqrt{n} - \ln n) \leq n R(h)^{n^\alpha} e^{-hx} e^{h\mu_0 n - h\sqrt{n}} n^h.$$

Аналогичным образом, подставляя $h = h_{x/n} + n^{-1/3}$, имеем

$$e^{-\Lambda(x/n)n} e^{(\mu_0 h - \ln R(h))(n-n^\alpha)} e^{-h\sqrt{n}} n^{1+h}$$

При этом $\ln R(h) \geq h\mu_0$ в силу выпуклости при $\mu > 0$ и в силу неравенство $R(h) \geq 1$ при $\mu \leq 0$, откуда мы получаем нужную асимптотику.
1.3) Первое слагаемое (5) оценим с помощью интегролокальной теоремы

$$\mathbf{P}(S_{n-[n^\alpha]} \in [x-y, x+\Delta_n - y)) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{(x-y)/n})} e^{-\Lambda\left(\frac{x-y}{n-n^\alpha}\right)(n-n^\alpha)}.$$

При этом

$$\Lambda\left(\frac{x-y}{n-n^\alpha}\right) = \Lambda\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{yh_{x/n}}{n-n^\alpha} + \frac{h_{x/n} x n^\alpha}{(n-n^\alpha)n} + \frac{1}{2\sigma^2(\tilde{h})}\left(\frac{y - \frac{x}{n}n^\alpha}{n-n^\alpha}\right)^2,$$

где $\tilde{h} \in [h_{x/n}, h_{(x-y)/(n-n^\alpha)}]$, а значит

$$\Lambda\left(\frac{x-y}{n-n^\alpha}\right)(n-n^\alpha) = \Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n - yh_{x/n} + \ln R(h_{x/n})n^\alpha + \frac{1}{2\sigma^2(\tilde{h})}\frac{\left(y - \frac{x}{n}n^\alpha\right)^2}{n-n^\alpha}.$$

Разобьем интегрирование в (5) на участки $\left|y - \frac{x}{n}n^\alpha\right| \leq n^{2/3}$ и $\left|y - \frac{x}{n}n^\alpha\right| > n^{2/3}$. Интеграл по второй части не превосходит

$$\frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\inf_{[0,h_2]}\sigma(h)} e^{-\frac{n^{1/3}}{2\sup_{[0,h_2]}\sigma^2(h)}} R(h_{x/n})^{-n^\alpha} \mathbf{E}Y_{[n^\alpha]}^{h_{x/n}},$$

то есть мал по сравнению с $\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n))$, поскольку

$$I(h) = \limsup_{m\to\infty} R(h)^{-m}\mathbf{E}Y_m^h \leq c_1 < \infty.$$

1.4) Итак, остается оценить первое слагаемое (5) при интегрировании в диапазоне $\left|y - \frac{x}{n}n^\alpha\right| \leq n^{2/3}$. В нем $\tilde{h} = h_{x/n} + o(1)$, откуда наше слагаемое оценивается сверху величиной

$$\frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n} R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}(\ln Y_{[n^\alpha]} \in dy) e^{h_{x/n}y} \sim R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]}\mathbf{E}\left(Y_{[n^\alpha]}^+\right)^{h_{x/n}} \mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)).$$

В силу доказанной нами равномерности сходимости

$$R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]}\mathbf{E}\left(Y_{[n^\alpha]}^+\right)^{h_{x/n}} \sim I(h_{x/n}),$$

что и требовалось доказать.
2) Проведем оценку снизу.
Аналогично 1) имеем для искомой вероятности оценку снизу

$$\mathbf{P}\left(\ln\left(\sum_{i=0}^{[n^\alpha]} B_{i-1}e^{S_n - S_i}\right) \in [x + \ln\delta_n, x + \Delta_n - \ln\delta_n)\right) - \mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} B_{i-1}e^{S_n-S_i}\right| \geq \delta_n \exp(x)\right),$$

причем в силу 1.1) вторая величина мала. Тем самым, нам достаточно оценить вероятность

$$\mathbf{P}\left(\ln\left(\sum_{i=0}^{[n^\alpha]} B_{i-1}e^{S_n-S_i}\right) \in [x, x+\Delta_n)\right).$$

Оценим ее снизу интегралом

$$\int_{n^\alpha x/n - n^{3/7}}^{n^\alpha x/n - n^{3/7}} \mathbf{P}(\ln Y_{[n^\alpha]} \in dy)\mathbf{P}(S_n - S_{[n^\alpha]} \in [x, x+\Delta_n)).$$

В силу произведенных ранее оценок этот интеграл эквиваленен

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n))R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]} \int_{n^\alpha x/n - n^{3/7}}^{n^\alpha x/n + n^{3/7}} e^{h_{x/n}}\mathbf{P}(\ln Y_{[n^\alpha]} \in dy),$$

где члены второго порядка при разложении Λ в ряд Тейлора мы отбросили, поскольку $(y - xn^{\alpha-1})^2 = o(n)$. Остается показать, что

$$R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]} \int_{n^\alpha x/n + n^{3/7}}^{\infty} e^{h_{x/n}y}\mathbf{P}(\ln(Y_{[n^\alpha]} \in dy), \;\; R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]} \int_{-\infty}^{n^\alpha x/n - n^{3/7}} e^{h_{x/n}y}\mathbf{P}(\ln(Y_{[n^\alpha]} \in dy) \qquad (6)$$

есть $o(1)$ при $n \to \infty$. Сделаем это только при $h > \tilde{\varepsilon}$. Для этого заметим, что в силу равномерной интегрируемости для любого A_n: $\mathbf{P}^{(h)}(A_n) \to 0$

$$\mathbf{E}^{(h)} \left| \frac{Y_n}{e^{S_n}} \right|^h I_{A_n} \to 0,\ n \to \infty,$$

равномерно по рассматриваемым h, поскольку при достаточно больших k и n и всех рассматриваемых h

$$\mathbf{E}^{(h)} \left| \frac{Y_n}{e^{S_n}} - \frac{Y_k}{e^{S_k}} \right|^h I_{A_n} < \varepsilon,\ R(h)^{-k} \mathbf{E} |Y_k|^h I_{A_n} < \varepsilon.$$

Теорема доказана.