Большие уклонения максимума

Перейдем к следующей интересной нам задаче:

Пусть блуждание X_i решетчато со сдвигом 1 и имеет среднее μ, дисперсию σ^2 и удовлетворяет правостороннему условию Крамера $R(h) < \infty$, $0 \le h < h^+$.

Найти асимптотику $\mathbf{P}(M_n = k)$, где $k \to \infty$, $n \to \infty$, $M_n = \max(S_1, ..., S_n)$.

Теорема 17.1.

1) Пусть $\mu > 0$. Тогда соотношение

$$\mathbf{P}(M_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} \exp(-\Lambda(k/n)n)\mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/n})} > 0, i > 0\right)\sum_{i=0}^{\infty} P(S_j \le 0, j \le i)R(h_{k/n})^{-i} \qquad (1)$$

выполнено равномерно по $k/n \in [\mu, m_2] \subset [\mu, m^+)$ при $n \to \infty$.

2) Пусть $\mu = 0$. Тогда (5) выполнено равномерно по $k/n \in [m_1, m_2] \subset (\mu, m^+)$ при $n \to \infty$.

3) Пусть $\mu < 0$. Тогда (5) выполнено равномерно по $k/n \in [m_1, m_2] \subset (\gamma, m^+)$ при $n \to \infty$, где $\gamma = m(\varkappa)$, $\varkappa > 0 : R(\varkappa) = 1$.

Доказательство Теоремы 17.1. Для доказательства нам понадобится лемма:

Лемма 17.1. Пусть $\tau_M = \min\{i : S_i = M_n\}$. Тогда

$$\mathbf{P}(M_n = k, \tau_M = l) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi l}\sigma(h_{k/l})} e^{-\Lambda\left(\frac{k}{l}\right)} \mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i > 0\right)\mathbf{P}(S_j \le 0, j \le n - l)$$

равномерно по k, l, таким что

$$\frac{k}{l} \in \begin{cases} [\mu, m_2] \subset [\mu, m^+), & \text{при } \mu > 0, \\ [m_1, m_2] \subset (0, m^+), & \text{при } \mu = 0, \\ [m_1, m_2] \subset (0, m^+), & \text{при } \mu < 0. \end{cases}$$

Доказательство:

Представим искомую вероятность в виде

$$\mathbf{P}(M_n = k,\ \tau_M = l) = \mathbf{P}(S_l = k)\mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le l|S_l = k)\mathbf{P}(S_j \le 0,\ j \le n - l).$$

Для доказательства леммы нам остается показать, что

$$\mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le l|S_l = k) \sim \mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i > 0\right),\ k, l \to \infty,$$

равномерно по указанным l.

Для доказательства представим рассматриваемую вероятность в виде разности

$$\mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le \varepsilon l|S_l = k) - \mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le \varepsilon l, \exists j > \varepsilon l : S_j < 0|S_l = k).$$

При любом t вторая вероятность оценивается сверху величиной

$$\mathbf{P}\left(\exists j > \varepsilon l : \frac{S_j - jk/l}{\sqrt{l}\sigma(h_{k/l})} \le -t \,\middle|\, S_l = k\right) \to \mathbf{P}(\inf_{s\in[\varepsilon,1]} W_s^0 \le -t)$$

при всех достаточно больших l, где сходимость вытекает из доказанной нами функциональной предельной теоремы. При достаточно больших t правая часть может быть сделана сколь угодно малой.

В силу той же функциональной предельной теоремы при достаточно большом t

$$\mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le \varepsilon l, S_{[\varepsilon l]} - k\varepsilon \notin [-t\sqrt{\varepsilon l}, t\sqrt{\varepsilon l}]|S_l = k)$$

может быть сделана сколько угодно малой.

Тем самым, нам требуется рассмотреть только вероятность

$$\mathbf{P}(S_i > 0,\ i \le \varepsilon l, S_{[\varepsilon l]} - k\varepsilon \in [-t\sqrt{\varepsilon l}, t\sqrt{\varepsilon l}]|S_l = k) = \frac{1}{\mathbf{P}(S_l = k)} \sum_{m=-t\sqrt{\varepsilon l}}^{t\sqrt{\varepsilon l}} \mathbf{P}(S_i > 0, i \le \varepsilon l, S_{[\varepsilon l]} = k\varepsilon + m)\mathbf{P}(S_{l(1-\varepsilon)} = k(1-\varepsilon) - m).$$

Подставляя асимптотику из локальной теоремы, мы видим, что

$$\mathbf{P}(S_{l(1-\varepsilon)} = k(1-\varepsilon) - m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi l(1-\varepsilon)}\sigma(h_{k/l})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{k}{l}\right) l(1-\varepsilon) + h_{k/l}m - \frac{m^2}{2\sigma^2(h_{k/l})(1-\varepsilon)l}\right).$$

Отсюда

$$\mathbf{P}(S_i > 0, i \le \varepsilon l, S_{[\varepsilon l]} = k\varepsilon + m)\mathbf{P}(S_{l(1-\varepsilon)} = k(1-\varepsilon) - m) \sim \frac{e^{-\Lambda\left(\frac{k}{l}\right) l} e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2(h_{k/l})(1-\varepsilon)l}}}{\sqrt{2\pi l(1-\varepsilon)}\sigma(h_{k/l})} \mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i \le \varepsilon l, S_{[\varepsilon l]}^{(h_{k/l})} = k\varepsilon + m\right).$$

При достаточно малом ε множитель $e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2(h_{k/l})(1-\varepsilon)l}}$ может быть сделан сколь угодно близкой к 1 при $m \le t\sqrt{\varepsilon l}$. Тем самым, искомая вероятность сколь угодна близка к

$$\mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i \le \varepsilon l, S_{[\varepsilon l]}^{(h_{k/l})} - k\varepsilon \in [-t\sqrt{\varepsilon l}, t\sqrt{\varepsilon l}]\right),$$

которая при достаточно больших t, всех ε и $l \to \infty$ сходится к $\mathbf{P}(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i > 0)$. Лемма доказана.

Для получения основной теоремы, воспользуемся представлением

$$\mathbf{P}(M_n = k) = \sum_{l=0}^{n} \mathbf{P}(M_n = k, \tau_M = l). \tag{2}$$

Фиксируем $m_2' \in [m_2, m^+)$, t и разобьем сумму (2) на три части: $l \le k/m_2'$, $l \in [k/m_2', n - \sqrt[3]{n}]$, $l \in [n - \sqrt[3]{n}, n]$.
1) Первая часть при любом $h \in [0, h^+)$ оценивается сверху величиной

$$\sum_{l=0}^{k/m_2'} \mathbf{P}(S_l = k) \le \sum_{l=0}^{k/m_2'} R(h)^l e^{-hk} = \frac{k}{m_2'} R(h)^{k/m_2'} e^{-hk}.$$

Полагая $h = h_{k/n} + n^{-2/3}$ и пользуясь тем, что

$$\ln R(h) = \ln R(h_{k/n}) + n^{-2/3} m(h_{k/n}) + o(n^{-1}) = \ln R(h_{k/n}) + kn^{-5/3} + o(n^{-1}),$$

мы получаем для этой величины оценку сверху

$$\frac{k}{m_2'} e^{-\left(\frac{k}{n} h_{k/n} - \ln R(h_{k/n})\right)n} e^{n^{-2/3} k\left(\frac{k}{m_2' n} - 1\right)} e^{-\ln R(h_{k/n})\left(n - \frac{k}{m_2'}\right)} = o(1) e^{-\Lambda(k/n)n} n^{-1/2},$$

поскольку $n - \frac{k}{m_2'} > \varepsilon n$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.
2) Во второй и третьей части (2) воспользуемся асимптотикой из Леммы 1:

$$\mathbf{P}(S_l = k, \tau_M = l) \sim \mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i > 0\right) \mathbf{P}(S_i \le 0,\ i \le n - l) \frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sigma(h_{k/l})} e^{-\Lambda\left(\frac{k}{l}\right)l}.$$

При этом из разложения в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\Lambda\left(\frac{k}{l}\right) l = \Lambda\left(\frac{k}{n}\right) l + \frac{k(n-l)}{n} h_{k/n} + \frac{1}{2\sigma^2(h)} \frac{k^2(n-l)^2}{n^2 l} = \Lambda\left(\frac{k}{n}\right) n + (n-l)\ln R(h_{k/n}) + \frac{1}{2\sigma^2(h)} \frac{k^2(n-l)^2}{n^2 l}$$

при некотором $h \in [0, h_2]$ (вообще говоря, зависящем от k, l, n). При $l \in [n - \sqrt[3]{n}, n]$ часть суммы будет

$$\sum_{l=n-\sqrt[3]{n}}^{n} \mathbf{P}(S_l = k, \tau_M = l) \sim \frac{e^{-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right)n}}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{l=0}^{\sqrt[3]{n}} \frac{1}{\sigma(h_{k/(n-l)})} \mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/(n-l)})} > 0, i > 0\right) \mathbf{P}(S_i \le 0,\ i \le l) R(h_{k/n})^{-l} e^{-\frac{k^2 l^2}{2\sigma^2\left(h_{k/n}\right)n^3}}.$$

Последний множитель в слагаемых правой части равномерно мал по рассматриваемых k, l, а $\sigma(h_{\frac{k}{n-l}})$, $\mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/(n-l)})} > 0, i > 0\right)$ эквивалентны аналогичным выражениям без l. Тем самым, соответствующая часть (2), эквивалентна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} \exp(-\Lambda(k/n)n) \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_l^{(h_{k/n})} > 0, i > 0\right) P(S_i \le 0, i \le l) R(h_{k/n})^{-l}. \tag{3}$$

3) Остается показать, что часть, соответствующая $l \in [n(1-\varepsilon), n - \sqrt[3]{n}]$, мала. Положим $\sigma_m = \min_{h \in [0, \tilde{h}]} \sigma(h)$, $\sigma_M = \max_{h \in [0, \tilde{h}]} \sigma(h)$

$$\sum_{l=n(1-\varepsilon)}^{n-\sqrt[3]{n}} \mathbf{P}(S_l = k, \tau_M = l) \le \frac{2e^{-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right)n}}{\sqrt{2\pi n}\sigma_m} \sum_{l=\sqrt[3]{n}}^{\infty} \mathbf{P}(S_i \le 0,\ i \le l) R(h_{\frac{k}{n}})^{-l}. \tag{4}$$

При $\mu \le 0$ $R(h_{\frac{k}{n}}) > 1 + \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$ в силу рассматриваемых ограничений на k, откуда (4) есть $o(1) n^{-1/2} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right)n\right)$. При $\mu > 0$

$$\sum_{l=\sqrt[3]{n}}^{\infty} \mathbf{P}(S_i \le 0,\ i \le l) = \sum_{l=\sqrt[3]{n}}^{\infty} \mathbf{E} I_{S_i \le 0,\ i \le l} = \mathbf{E}(T; T \ge \sqrt[3]{n}),$$

где T — момент попадания блуждания на положительную полуось. При положительном среднем этот момент имеет конечное математическое ожидание, а значит описываемая его часть есть $o(1)$. Тем самым, при данных l полученное выражение есть

$$o(1) n^{-1/2} \exp(-\Lambda(k/n)n).$$

Совершенно аналогично может быть получена интегролокальная теорема в нерешетчатом случае:

$$\mathbf{P}(M_n \in [x, x+\Delta_n)) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp(-\Lambda(x/n)n)\mathbf{P}\left(S_i^{(h_{x/n})} > 0, i > 0\right) \sum_{i=0}^{\infty} P(S_j \le 0, j \le i) R(h_{x/n})^{-i}. \tag{5}$$

в тех же условиях, что и в основной теореме.

Несколько другой вид приобретает этот результат в том случае, когда мы рассматриваем случай $\mu < 0$, $k < \gamma n$.

Теорема 17.2.

Пусть $\mu < 0$. Тогда соотношение

$$\mathbf{P}(M_n = k) \sim \frac{\exp(-\varkappa k)}{\varkappa\gamma} \mathbf{P}\left(S_i^{(\varkappa)} > 0, i > 0\right) \mathbf{P}(S_j \le 0, j > 0) \tag{6}$$

выполнено равномерно по $k/n \in [m_1, m_2] \subset (0, \gamma)$ при $n \to \infty$, где $\gamma = m(\varkappa)$, $\varkappa > 0 : R(\varkappa) = 1$.

Доказательство Теоремы 17.2.

Как и прежде представим искомую вероятность в виде

$$\sum_{l=1}^{n} \mathbf{P}(M_n = k, \tau_M = l). \tag{7}$$

1) Рассмотрим $l \in [k/\gamma - n^{3/5}, k/\gamma + n^{3/5}]$. В этом случае в силу Леммы 1

$$\mathbf{P}(M_n = k, \tau_M = l) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi l}\sigma(h_{k/l})} e^{-\Lambda(\frac{k}{l})} \mathbf{P}\left(S_i^{(h_{k/l})} > 0, i > 0\right) \mathbf{P}(S_j \le 0, j \le n-l) \sim$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi l}\sigma(\varkappa)} e^{-\Lambda(\frac{k}{l})} \mathbf{P}\left(S_i^{(\varkappa)} > 0, i > 0\right) \mathbf{P}(S_j \le 0, j \le n-l),$$

причем

$$\Lambda\left(\frac{k}{l}\right) = \Lambda(\gamma) + \left(\frac{k}{l} - \gamma\right) h_\gamma + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{l} - \gamma\right)^2 \sigma^2(h) = \frac{k\varkappa}{l} + \frac{(k - l\gamma)^2}{2l^2\sigma^2(h)}$$

при некотором $h \in [\varkappa, k/l]$. Следовательно,

$$\sum_{l=\frac{k}{\gamma}-n^{3/5}}^{\frac{k}{\gamma}+n^{3/5}} \mathbf{P}(M_n = k, \tau_M = l) = \frac{\exp(-\varkappa k)}{\sqrt{2\pi l}\sigma(\varkappa)} \mathbf{P}\left(S_i^{(\varkappa)} > 0, i > 0\right) \mathbf{P}(S_j \le 0, j \le n-l) \sum_{l=\frac{k}{\gamma}-n^{3/5}}^{\frac{k}{\gamma}+n^{3/5}} e^{-\frac{(k-l\gamma)^2}{2l\sigma^2(h)}}.$$

При этом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{l=\frac{k}{\gamma}-n^{3/5}}^{\frac{k}{\gamma}+n^{3/5}} \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{(k-l\gamma)^2}{2l\sigma^2(h)}} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2\sigma^2(\varkappa)}} dx = \frac{\sigma(\varkappa)}{\gamma}.$$

Строго говоря, это не совсем интегральная сумма для описанного интеграла (поскольку он несобственный), но, разбивая суммирование на зоны "до $t\sqrt{n}$" и "после $t\sqrt{n}$", мы увидим, что первая часть представляет интегральную сумму, а вторая мала при достаточно большом t.

2) Рассмотрим $l \le \gamma^{-1}k - n^{3/5}$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_l = k) \le \mathbf{P}(S_l \ge k) \le \frac{R(h)^l}{e^{hk}}.$$

Положим $h = \varkappa + n^{-3/7}$, тогда

$$\ln R(h) = \ln R(\varkappa) + n^{-3/7}\gamma + \frac{1}{2} n^{-6/7} \sigma^2(\tilde{h}),$$

при некотором $\tilde{h} \in [\varkappa, \varkappa + n^{-3/7}]$, откуда

$$\mathbf{P}(S_l = k) = e^{-\varkappa k} e^{n^{-3/7}(l\gamma - k)} e^{\frac{l\sigma^2(\tilde{h})}{2n^{6/7}}}.$$

Эта величина есть $o(1)n^{-1}\exp(-\varkappa k)$.

3) Рассмотрим $l \ge \gamma^{-1}k + n^{3/5}$. В этом случае проделаем те же оценки, что и в прошлом пункте, но с $h = \varkappa - n^{-3/7}$.

Аналогичная теорема верна в случае нерешетчатого распределения

$$\mathbf{P}(M_n \in [x, x+\Delta_n)) \sim \frac{\Delta_n \exp(-\varkappa x)}{\varkappa\gamma} \mathbf{P}\left(S_i^{(\varkappa)} > 0, i > 0\right) \mathbf{P}(S_j \le 0, j > 0).$$