Локальная предельная теорема

Теорема 19.1. (Гнеденко). Пусть X_i — н.о.р. дискретные случайные величины с шагом $d = 1$ (то есть величины целочисленные, причем НОД принимаемых ими значений есть 1), $EX_i = a$, $DX_i = \sigma^2$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(k-an)^2}{2n\sigma}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Доказательство Теоремы 19.1. Будем доказывать теорему 6.2 на основе формулы обращения для дискретного случая

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \psi_{X_1}^n(t) dt = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{itk}{\sigma\sqrt{n}}} \psi_{X_1}^n \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt.$$

Положим $x = \frac{k-an}{\sqrt{n}\sigma}$, тогда

$$\mathbf{P}(S_n = x) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itx} e^{-it\frac{a}{\sigma}\sqrt{n}} \psi_{X_1}^n \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itx} \psi_{\frac{X_1-a}{\sigma}}^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt.$$

При этом

$$\left| \int_{\delta\sigma\sqrt{n} < |t| < \pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itx} \psi_{\frac{X_1-a}{\sigma}}^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt \right| \le \pi\sigma\sqrt{n} q^n,$$

где $\sup_{\delta < |s| < \pi} |\psi_{X_1}(s)| = q$. Заметим, что если $\psi_{X_1}(s_0) = e^{is_0 b}$, то $\psi_{X_1 - b}(s_0) = 1$, откуда

$$\mathbf{P}\left(X_1 \in \left\{b + \frac{2\pi k}{s_0},\ k \in \mathbb{Z}\right\}\right) = 1.$$

Тогда шаг X_1 будет $\frac{2\pi}{s_0}$, что, в сочетании с решетчатостью и $d = 1$ дает $s_0 > 2\pi$. Это противоречит $\delta < s < \pi$, то есть $q < 1$ и оцениваемый интеграл экспоненциально мал по n.

В этом месте мы остановились во время лекции

При этом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{|t| \le \delta\sigma\sqrt{n}} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt + \frac{o(1)}{\sqrt{n}},$$

где $o(1)$ равномерно по x стремится к 0 при $n \to \infty$, поскольку

$$\int_{|t| > \delta\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/2} dx = o(1).$$

Тем самым, для доказательства требуемой формулы, нам достаточно показать, что при достаточно малых δ

$$\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{|t| < \delta\sigma\sqrt{n}} e^{-itx} \left(\psi_{\frac{X_1-a}{\sigma}}^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2}\right) dt = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Для этого оценить

$$\int_{|t| > \delta\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/2} \left| e^{n\left(\ln\psi_{\frac{X_1-a}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \frac{t^2}{2n}\right)} - 1 \right| dt.$$

При любом $\varepsilon > 0$ и достаточно малом δ при $|s| < \delta$ верно неравенство

$$\left| \ln\psi_{\frac{X_1-a}{\sigma}}(s) + \frac{s^2}{2} \right| < \varepsilon s^2.$$

Тогда оцениваемый интеграл не превосходит

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \left(e^{\varepsilon t^2} - 1\right) dt < \varepsilon_1$$

при любом $\varepsilon_1 > 0$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Аналогично прошлым рассуждениям, локальная предельная теорема равномерна относительно сопряженного распределения:

$$\mathbf{P}(S_n^{(h)} = kd) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{kd/n})} \exp\left(-\frac{(kd - m(h)n)^2}{n\sigma^2(h_{kd/n})}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $o()$ равномерно мало по $h \in [0, \tilde{h}] \subset [0, h^+)$, k. Тогда переходя к сопряженному распределению, имеем

$$\mathbf{P}(S_n = kd) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{kd/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{kd}{n}\right) n\right)$$

равномерно по $kd/n \in [\mu, \theta_1] \subset [\mu, \theta^+)$.

Случайные процессы. Функциональные предельные теоремы

Случайным элементом из $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$, где $\mathcal{X}$ — некоторое множество, $\mathcal{S}$ — сигма-алгебра на нем, называют отображение X, т.ч. $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$, $S \in \mathcal{S}$.

Мы будем рассматривать случайные процессы — случайные элементы в $\mathbb{R}^T$, $T \subset \mathbb{R}^+$, т.е. каждому ω сопоставляется функция $X(\cdot, \omega) : T \to \mathbb{R}$. Обычно T будет отрезком или всей полупрямой. Для определения процесса нам требуется определить сигма-алгебру на $\mathbb{R}^T$.

Давайте вспомним, как мы вводили предыдущие сигма-алебры.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma([a,b], a, b \in \mathbb{R}) = \sigma(U, U \in \mathcal{O}),$$

где $\mathcal{O}$ — множество открытых множеств $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma([a_1,b_1] \times ... \times [a_n,b_n], a_i, b_i, i \in \{1,...,n\}) = \sigma(B_1 \times ... \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) = \sigma(U, U \in \mathcal{O}_n),$$

где $\mathcal{O}_n$ — множество открытых множеств $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) = \sigma([a_1,b_1] \times ... \times [a_n,b_n] \times \mathbb{R}^\infty, a_i, b_i, i \in \{1,...,n\}, n \geq 0) = \sigma(B_1 \times ... \times B_n \times \mathbb{R}^\infty, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) =$$
$$\sigma(B \times \mathbb{R}^\infty, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \sigma(U, U \in \mathcal{O}_\infty).$$

Естественно в качестве порождающих $\mathbb{R}^T$ рассматривать цилиндры

$$B_{t_1,...,t_n}(A_1,...,A_n) = \{x(t) : x(t_1) \in A_1, ..., x(t_n) \in A_n\},$$

$t_i \in T$, $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда, полагая

$$B_{\{t_n\}_{n=0}^\infty}(A) = \{x(t) : (x(t_0), ..., x(t_n), ...) \in A\},$$

где $\{t_n\}$ — последовательность элементов T, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, имеем

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) = \sigma(B_{t_1,...,t_n}([a_1,b_1], ..., [a_n,b_n]), t_i, a_i, b_i, i \leq n) = \sigma(B_{t_1,...,t_n}(B_1,...,B_n), t_i, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) =$$
$$\sigma(B_{\{t_n\}_{n=0}^\infty}(A), \{t_n\}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)).$$

Оказывается, что последние порождающие уже образуют сигма-алгебру. Таким образом, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) = \{x(t) : (x(t_0), ..., x(t_n), ...) \in A\}$, для любого борелевского множества в $\mathbb{R}^T$ найдется последовательность $t_0, ...$ и множество $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, такие что $\{x(t) : (x(t_0), ..., x(t_n), ...) \in A\}$.

Это приводит к тому, что, скажем, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$ не содержит множеств наподобие $\{x(t) : \sup x(t) < 1\}$, а значит самые простые функционалы от процесса уже не обязательно будут случайными величинами.

В связи с этим зачастую рассматривают процессы, имеющие непрерывные или полунепрерывные траектории, т.е. измеримые отображения из $\Omega, \mathcal{F}$ в $C[0,1]$ ($D[0,1]$ — пространство неперывных функций). Здесь $\mathcal{B}(C[0,1])$ порождается теми же цилиндрическими множествами непрерывных функций. Оказывается, что эта сигма-алгебра содержит все открытые (замкнутые) множества $C[0,1]$ по непрерывной норме. В $D[0,1]$ используют более сложную метрику Скорохода, на которой мы не будем останавливаться.

Итак, мы будем рассматривать случайные процессы с непрерывными траекториями — измеримое отображение в $C[0,1]$, $\mathcal{B}(C[0,1])$. При этом ровно те наборы случайных величин $X_t, t \in [0,1]$, что при всех ω $X_\cdot(\omega)$ есть непрерывная функция.

Распределение процесса (т.е. вероятности попадания в различные множества функций) определяется конечномерными распределениями $\mathbf{P}(X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_n} \in A_n)$.

Говорят, что процессы $X_{t,n}$ слабо сходятся к процессу X_t, если выполнено одно из равносильных условий 1) $\mathbf{P}(X_{\cdot,n} \in A) \to \mathbf{P}(X_\cdot \in A)$, $\forall A \in C[0,1] : \mathbf{P}(X_\cdot \in \partial A) = 0$.

2) $\mathbf{E}g(X_{\cdot,n}) \to Eg(X_\cdot)$, для всех g — непрерывных ограниченных функционалов из $C[0,1]$ в $\mathbb{R}$.

3) $g(X_{\cdot,n}) \xrightarrow{d} g(X_\cdot)$, для всех g — непрерывных функционалов из $C[0,1]$ в $\mathbb{R}^k$ при любом k.

Из теоремы Александрова 1) можно заменить на $\limsup \mathbf{P}(X_{\cdot,n} \in F) \leq \mathbf{P}(X \in F)$ для замкнутых F или на $\liminf \mathbf{P}(X_{\cdot,n} \in G) \leq \mathbf{P}(X \in G)$ для открытых G.

Поскольку конечномерные распределения определяют распределения, можно предположить, что для слабой сходимости достаточно сходимости конечномерных распределений.

$$\mathbf{P}(X_{t_1,n} \in A_1, ..., X_{t_k,n} \in A_k) \to \mathbf{P}(X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_k} \in A_k)$$

при всех $A_i : \mathbf{P}(X_{t_i} \in \partial A_i) = 0$. Оказывается, что это не так. Действительно, рассмотрим $X_{t,n}$, $X_{t,n} = nt$, $t < 1/n$, $X_{t,n} = 2 - nt$, $t \in [1/n, 2/n]$, $X_{t,n} = 0$, $t > 2/n$. Тогда

$$\mathbf{P}(X_{t_1,n} \in A_1, ..., X_{t_k,n} \in A_k) \to I_{0\ inA_1,...,0 \in A_k} = \mathbf{P}(0 \in A_1, ..., 0 \in A_k).$$

Но

$$\mathbf{P}(X_{\cdot,n} \in \{x(t) : supx(t) \leq 0.5\}) = 0 \not\to \mathbf{P}(X_\cdot \in \{x(t) : supx(t) \leq 0.5\}) = 1$$

Что же нужно добавить к условию сходимости конечномерных распределений, чтобы получить слабую сходимость? Достаточно потребовать условие слабой секвенциальной компактности — для любой последовательности n_k найдется подпоследовательность n_{k_i}, т.ч. процесс $X_{t,n_{k_i}}$ слабо сходится.

Действительно, если последовательность слабо секвенциально компактна и сходится в смысле конечномерных распределений к какому-то процессу $X.$, то каждая сходящаяся последовательность $X_{\cdot,n_{k_i}}$ сходится к $X.$, поскольку ее конечномерные распределения сходятся к $X.$.
Предположим, что $X_{\cdot,n}$ не сходится по распределению к $X.$. Тогда найдется подпоследовательность $X_{\cdot,n_i}$ и множество A, такая что при каком-то ε и всех i

$$|\mathbf{P}(X_{\cdot,n_i} \in A) - \mathbf{P}(X. \in A)| > \varepsilon.$$

Выделяя из n_i сходящуюся подпоследовательность, приходим к противоречию.

Условие слабой секвенциальной компактности сложно для проверки. Однако, оказывается, что это условие эквивалентно более простому условию плотности

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K_\varepsilon \; \forall n \; \mathbf{P}(X_{\cdot,n} \in K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon,$$

где K_ε — компакт. Эта теорема, называемая теоремой Прохорова, верна не только для $C[0,1]$, но и для произвольного полного метрического сепарабельного пространства.

В $C[0,1]$ условие плотности можно переписать в виде двух условий:
1) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \; \mathbf{P}(|X_n(0)| \leq M) < \varepsilon$,
2) $\forall \varepsilon, \varepsilon_1 > 0 \; \exists \delta$

$$\mathbf{P}(\omega_{X_n}(\delta) > \varepsilon_1) \leq \varepsilon,$$

где $\omega_f(\delta)$ — модуль неперерывности.

Итак, чтобы доказать слабую сходимость случайных элементов, нам нужно доказать:
а) сходимость конечномерных распределений
б) плотность.

Скажем, таким образом доказывается теорема Донскера:
Теорема. Рассмотрим X_i — н.о.р., $\mathbf{E}X_i = \mu$, $\mathbf{D}X_i = \sigma^2$ и введем процесс

$$Y_n(t) = \frac{S_{[nt]} - \mu[nt]}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{(X_{[nt]+1} - \mu)(nt - [nt])}{\sigma\sqrt{n}}, \; t \in [0,1].$$

Иначе говоря, мы линейно интерполировали траекторию случайного блуждания, вычли μnt, сжали в $\sigma\sqrt{n}$ раз по вертикали и в n раз по горизонтали. Тогда

$$\mathbf{P}(Y_n(t) \in A) \to \mathbf{P}(W_t \in A), n \to \infty,$$

где $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$: $\mathbf{P}(W_t \in \partial A) = 0$, ∂A — граница A в $C[0,1]$ с равномерной нормой.

Здесь W_t — процесс броуновского движения, такой что:
1) $W_0 = 0$
2) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, $t > s$,
3) $W_{t_1} - W_{t_0}$,...,$W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ независимы при любых $t_1 < t_2 ... < t_n$.
4) W_t имееет непрерывные траектории.

Это такая обобщенная центральная предельная теорема. Она не только утверждает, что $Y_n(1) = (S_n - \mu n)/(\sigma\sqrt{n})$ сходится к величине со стандартным нормальным распределением, но и вся траектория ведет себя подобно траектории броуновского движения.