Итак, на прошлом занятии мы доказали следующий результат:
Теорема 11.1. Пусть X_i — н.о.р. случайные величины с математическим ожиданием $EX=\mu$ и дисперсией $DX=\sigma^2>0$, имеющие нерешетчатое распределение. Тогда при всех δ_n, достаточно медленно стремящихся к 0, справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\left(S_n\in[x,x+\delta_n)\right)\sim\frac{\delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu n)^2}{2n\sigma^2}}.$$

при всех $x-\mu n=O(\sqrt{n})$, причем равномерно по $x-\mu n\in[-t\sqrt{n},t\sqrt{n}]$ при любом $t>0$.

Давайте еще раз вспомним, откуда мы получили такого рода результат. Мы ввели $\tilde S_n=S_n+\eta$, где η не зависит от S_n и имеет распределение с х.ф. $\psi_\eta(t)=|t/M|$, $|t|\le M$ и 0, $|t|\ge M$, плотностью

$$\frac{2\sin^2(xM/2)}{\pi x^2M}=\frac{1-\cos(XM)}{\pi x^2M}.$$

1) $\mathbf{P}\left(\frac{\tilde S_n}{\sqrt{n}}\in[y,y+\Delta n^{-1/2})\right)$ оценивается суммой

$$\frac{1}{2\pi}\int_y^{y+\Delta n^{-1/2}}\int_{|t|<\delta\sqrt{n}}\left|\psi_\eta\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right||g_n(t)|dtds+\frac{\Delta\sqrt{n}}{2\pi}(M-\delta)q(\delta,M)^n,$$

где $g_n(t)=e^{n\ln\psi_{\frac{X_1-\mu}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}-e^{-t^2/2}$, $q_{\delta,M}=\sup_{[\delta,M]}|\psi_{X_1}(t)|$.

2) $\mathbf{P}\left(\tilde S_n\in[x,x+\Delta)\right)$ связана с искомой вероятностью соотношениями

$$\mathbf{P}\left(\tilde S_n\in[x+\delta,x-\delta+\Delta]\right)-\frac{1}{M\sqrt{n}}-\frac{I}{\mathbf{P}(|\eta|<\delta)}\le\mathbf{P}(S_n\in[x,x+\Delta])\le\frac{\mathbf{P}\left(\tilde S_n\in[x-\delta,x+\Delta+\delta]\right)}{\mathbf{P}(|\eta|<\delta)},$$

где $I=\int_{\delta<|y|<\sqrt{n}}\mathbf{P}\left(\tilde S_n\in[x-y,x-y+\Delta]\right)P(\eta\in dy)$.

Следовательно, если мы будем рассматривать семейство распределений $X_i\sim F_\alpha(x)$ при некоторых α, то полученные оценки будут равномерны по α, если:
a) $g_{n,\alpha}(t)<\varepsilon e^{-t^2/2}$ при любом $\varepsilon>0$, достаточно больших n и всех α,
b) $\sup_{t\in[\delta,M],\alpha}|\psi_\alpha(t)|<1$.
c) σ_α при всех α лежат в некотором отрезке $[\sigma_1,\sigma_2]\subset(0,\infty)$.
В этом случае оценки 1) будут равномерны по α, x, а значит будут равномерными и оценки 2).

Пусть $X_i\sim F$, $R(h)=\mathbf{E}e^{hX}<\infty$ при $h\in(0,h^+)$. Тогда рассмотрим

$$F_\alpha(x)=F^{(h)}(x)=\frac{1}{R(h)}\int_{-\infty}^x e^{hu}\mathbf{P}(X\in du)$$

при $h\in[0,h^+)$. Покажем, что условия a), b), c) выполнены для $h\in[0,\tilde h]$, $\tilde h\le h^+$. Действительно,

$$\psi_{X_1^{(h)}}(t)=\frac{1}{R(h)}\int_{-\infty}^\infty e^{itx}e^{hx}dF(x)=\frac{R(it+h)}{R(h)}.$$

Посмотрим более внимательно на функцию $R(z)$ как функцию комплексного переменного. Если $R(h)<\infty$ при $h\in[0,h^+)$, то а) $R(z)$ определена в полосе $0\le Re z\le h^+$.
б) $R(z)$ аналитична, поскольку

$$\frac{R(z+\Delta z)-R(z)}{\Delta z}=\mathbf{E}e^{zX}\left(\frac{e^{\Delta z\cdot X}-1}{\Delta z}\right)\to\mathbf{E}e^{zX}X$$

при $\Delta z \to 0$ в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Теперь мы готовы доказывать a)-c).

1) Для доказательства a) нам достаточно доказать, что первые три члена ряда Тейлора приближают $\ln \psi_{X^{(h)}}(tn^{-1/2})$ равномерно по h при по $|t| \le \delta n^{-1/2}$. Пусть $R(h+it) = a(h,t) + ib(h,t)$, где a, b — вещественная и мнимая части $R(h)$. Из разложения в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$a(h,t) = a(h,0) + a'_t(h,0)t + a''_{tt}(h,\xi)\frac{t^2}{2},\ b(h,t) = b(h,0) + b'_t(h,0)t + b''_{tt}(h,\chi)\frac{t^2}{2},$$

где $\xi \in [0,t]$, $\chi \in [0,t]$. При этом

$$R(h+it) = a(h,0) + b(h,0) + (a'_t(h,0) + b'_t(h,0)i)t + (a''_{tt}(h,0) + ib''_{tt}(h,0))\frac{t^2}{2} + o(t^2) = R(h) + itR'(h) + \frac{(it)^2}{R}''(h)$$

Из единственности разложения в ряд Тейлора, имеем $R(h) = a(h,0) + ib(h,0)$, $iR'(h) = a'_t(h,0) + ib'_t(h,0)$, $-R''(h) = (a''_{tt}(h,0) + ib''_{tt}(h,0))$, а значит

$$\left| R(h+it) - \left(R(h) + itR'(h) + \frac{(it)^2}{R}''(h) \right) \right| = \frac{t^2}{2}\left(|a''_{tt}(h,\xi) - a''_{tt}(h,0)| + |b''_{tt}(h,\chi) - b''_{tt}(h,0)| \right).$$

Величина $(|a''_{tt}(h,\xi) - a''_{tt}(h,0)| + |b''_{tt}(h,\chi) - b''_{tt}(h,0)|)$ при $t \le \delta$ не превосходит удвоенного модуля непрерывности $\sup_{|z-\tilde{z}|<\delta} |R''(z) - R''(\tilde{z})|$, который в силу соотношения

$$|R''(z) - R''(\tilde{z})| \le \mathbf{E}\left|e^{zX}\right|\left|e^{(\tilde{z}-z)X} - 1\right| \le |\tilde{z} - z|\mathbf{E}e^{RezX}e^{|\tilde{z}-z|X}$$

может быть сделан меньше любого заданного $\varepsilon > 0$ при достаточно малом δ. В последнем неравенстве мы воспользовались соотношением

$$|e^z - 1| \le |z|e^{|z|},$$

справедливом при всех $z \in \mathbb{C}$ в силу аналитичности комплексной экспоненты:

$$|e^z - 1| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \right| = |z| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{(k-1)!} \le |z| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = |z|e^{|z|}.$$

Тем самым, $\psi_{X^{(h)}}(t)$ равномерно по h приближается первыми тремя членами ряда Тейлора. Следовательно, аналогичный факт верен и для $\psi_{\frac{X^{(h)}-\mu(h)}{\sigma(h)}}(t)$, поскольку $\mu(h)$, $\sigma(h)$ — непрерывные, а значит ограниченные на отрезке $[0,\tilde{h}]$ функции. Отсюда требуемый факт верен и для логарифма, что и требовалось доказать в части a).

2) Для доказательства b) предположим противное. Тогда при некоторых $0 < \delta < M$ найдется набор $h_n \in [0,\tilde{h}]$, $t_n \in [\delta, M]$, таких что $\limsup_{n\to\infty} |R(h_n+it_n)/R(h_n)| = 1$. Выделим из h_n сходящуюся подпоследовательность, а из соответствующей подпоследовательности t_n — сходящуюся подпоследовательность, то есть $h_{n_k} \to h$, $t_{n_k} \to t$, $t \ne 0$, при $k \to \infty$. Но тогда $|R(h+it)/R(h)| = 1$, то есть $|\psi_{X^{(h)}}(t)| = 1$. Значит, $X^{(h)}$ будет решетчатой. Но

$$P(X^{(h)} \in A) = \frac{1}{R(h)} \int_A e^{hx} P(X \in dx),$$

откуда $X^{(h)}$ будет решетчатой только если X лежит на той же решетке. Мы пришли к противоречию, откуда b) справедливо.

3) Для доказательства c) заметим, что функция $\sigma(h)$ непрерывна и неотрицательна при $h \in [0,\tilde{h}]$. Следовательно, она ограничена и остается доказать лишь то, что она ненулевая. Но если $\sigma(h)$ нулевая, то $X^{(h)}$ константа п.н., в частности, она решетчата, что, как мы видели в b), невозможно.

Итак, мы доказали, что условия a)-c) выполнены, а значит интегролокальная теорема выполнена равномерно по $h \in [0,\tilde{h}]$. Из полученной теоремы вытекает следующее утверждение:

Теорема 11.2. Пусть X_i — н.о.р. нерешетчатые, $\mathbf{E}X_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2$, $R(h) = \mathbf{E}e^{hX} < \infty$ при $h \in (0, h^+)$. Тогда соотношение

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x + \Delta_n)) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} e^{-\Lambda(x/n)n}, \ n \to \infty,$$

выполнено равномерно по $x/n \in [0, \theta_2]$, $\theta_2 \in (0, m^+)$ при всех Δ_n, достаточно медленно стремящихся к 0.

Доказательство Теоремы 11.2.

По определению сопряженного распределения

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x + \Delta_n)) = \frac{1}{R(h)^n} \int_x^{x+\Delta_n} e^{-hy} \mathbf{P}(S_n^{(h)} \in dy) = \frac{(1 + o(1))}{R(h)^n} e^{-h_{x/n}x} \mathbf{P}(S_n^{(h_{x/n})} \in [x, x + \Delta_n)).$$

Для доказательства теоремы остается применить к последней вероятности интегролокальную теорему. Равномерность полученной асимптотики по x вытекает из доказанной нами равномерности асимптотики в интегролокальной теореме по x и h.