Во втором семестре мы будем изучать точную асимптотику больших уклонений
Давайте сравним результаты, который мы получили для грубых и точных больших уклонений случайных блужданий.
Теорема (Крамера). Пусть X_i н.о.р. Тогда

$$-\inf_{\theta\in A_{int}}\Lambda(\theta)\le\liminf_{n\to\infty}\frac{\ln P\left(\frac{S_n}{n}\in A\right)}{n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln P\left(\frac{S_n}{n}\in A\right)}{n}\le-\inf_{\theta\in\overline{A}}\Lambda(\theta).$$

Теорема (Петрова). Пусть X_i н.о.р., $EX_i=\mu$, $R(h)=Ee^{hX}$ конечно при $h\in(0,h^+)$. Тогда

$$P(S_n\ge\theta n)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi h_\theta n}\sigma(h_\theta)}e^{-\Lambda(\theta)n}$$

при $n\to\infty$, $\theta\in(\mu,m^+)$, где $m^+=\lim_{h\to h^+}m(h)$.

Во-первых, в первой теореме не накладывается никаких условий на конечность $R(h)$. С другой стороны, как мы видели, это достаточно иллюзорное преимущество, поскольку в случае более тяжелых чем экспоненциальных хвостов распределения теорема Крамера просто сообщит, что вероятности больших уклонений S_n также неэкспоненциальны.
Во-вторых, в первой теореме рассматриваются произвольные множества A, а во второй указаны только лучи. В действительности, для множеств произвольного вида точную асимптотику выписать достаточно затруднительно, но чуть позже мы увидим, как выписать ее для достаточно хороших множеств A.
В-третьих, в первой теореме область расположения A — вся прямая, а во второй рассматривается только участок (μ,m^+). При выполнении левостороннего условия Крамера $R(h)=Ee^{hX}<\infty$, $h^-<h<0$ можно расширить теорему, захватив множества вида $P(S_n\le\theta n)$, $\theta\in(m^-,\mu)$. Но, скажем, захватить $\theta=\mu$ в такой форме не получится (хотя бы потому, что в знаменателе теоремы Петрова фигирирует h_θ, равное нулю при $\theta=\mu$).

Исправить эти недостатки частично позволяет аппарат так называемых интегролокальных теорем (мы придерживаемся терминологии А.А. Боровкова). Базовый для нас результат принадлежит Стоуну:
Теорема 10.1. Пусть X_i — н.о.р. случайные величины с математическим ожиданием $EX=\mu$ и дисперсией $DX=\sigma^2>0$, имеющие нерешетчатое распределение. Тогда при всех δ_n, достаточно медленно стремящихся к 0, справедливо соотношение

$$P\left(S_n\in[x,x+\delta_n)\right)\sim\frac{\delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu n)^2}{2n\sigma^2}}.$$

при всех $x-\mu n=O(\sqrt{n})$, причем равномерно по $x-\mu n\in[-t\sqrt{n},t\sqrt{n}]$ при любом $t>0$.
Замечание. Напомним, что равномерность означает, что

$$\sup_{x-\mu n\in[-t\sqrt{n},t\sqrt{n}]}\frac{P\left(S_n\in[x,x+\delta_n)\right)}{\frac{\delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu n)^2}{2n\sigma^2}}}\to 1.$$

Что это за странный результат и для чего он нужен?
Мы хорошо знакомы с интегральной теоремой

$$P\left(S_n\in[\mu n+t_1\sqrt{n},\mu n+t_2\sqrt{n}]\right)\to\Phi(t_2)-\Phi(t_1)$$

при $n\to\infty$. Эта теорема позволяет оценивать вероятности попадания в отрезки длины $\sqrt{n}$. Заметим, что этот результат есть следствие Теоремы 1:

$$P\left(S_n \in [\mu n + t_1\sqrt{n}, \mu n + t_2\sqrt{n}]\right) = \sum_{k=1}^{[(t_2-t_1)\sqrt{n}/\delta_n]} P\left(S_n \in [\mu + t_1\sqrt{n} + k\delta_n, \mu + t_1\sqrt{n} + (k+1)\delta_n)\right) + o(n^{-1/2}) =$$

$$(1+o(1)) \sum_{k=1}^{[(t_2-t_1)\sqrt{n}/\delta_n]} \frac{\delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(t_1\sqrt{n}+k\delta_n)^2}{2n\sigma^2}} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} dt = \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где в первом переходе $o(n^{-1/2})$ возникло из-за того, что $(t_2 - t_1)\sqrt{n}$ может не делиться нацело на δ_n, во втором переходе мы воспользовались Теоремой 1 (в частности, указанной в ней равномерностью сходимости), а в третьем тем, что представленная сумма является интегральной с шагом $\delta_n n^{-1/2}$.
На этих рассуждениях мы видим, что интегролокальные теоремы позволяют нам оценивать вероятности попадания суммы как в отрезки длины порядка $\sqrt{n}$, так и в отрезки длины $O(1)$ и даже некоторые отрезки длины $o(1)$. Чуть позже мы увидим, насколько удобна эта форма для работы с большими уклонениями.

Доказательство Теоремы 10.1.
Мы докажем теорему Стоуна для фиксированного Δ. Тот факт, что она будет справедлива при некотором Δ_n, стремящемся к 0, вытекает из общих соображений:
Пусть $a_n(\Delta)/b_n(\Delta)$ сходится к 1 при любом $\Delta > 0$, где a_n, b_n — некоторые функции. Тогда $a_n(\Delta_n)/b_n(\Delta_n)$ сходится к 1 при некоторой Δ_n, стремящейся к нулю.
Действительно, заметим, что при любом k и $n \geq N_k$, где N_k достаточно велико,

$$\left|\frac{a_n(1/k)}{b_n(1/k)} - 1\right| < 1/2^k.$$

Для удобства будем считать, что $N_{k+1} > N_k$. Полагая $\Delta_n = 1/k$ при $n \in (N_k, N_{k+1}]$, имеем требумое.

Заметим, что поскольку X_1 нерешетчата, то $\sup_{\delta<|t|<M} |\psi_{X_1}(t)| = q(\delta, M) < 1$ при любых δ, M. Будем считать, что $EX_1 = 0$, $DX_1 = 1$. Рассмотрим $\tilde{S}_n = S_n + \eta$, где η не зависит от S_n и имеет распределение с х.ф. $\psi_\eta(t) = |t/M|$, $|t| \leq M$ и 0, $|t| \geq M$. Эта функция является характеристической для величины с плотностью

$$\frac{2\sin^2(xM/2)}{\pi x^2 M} = \frac{1-\cos(XM)}{\pi x^2 M}.$$

Величина $\tilde{S}_n$ имеет плотность, поскольку ее х.ф. финитна, а значит абсолютно интегрируема. В силу формулы обращения

$$f_{\frac{\tilde{S}_n}{sqrtn}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}}}(t) e^{-itx} dt,$$

где $\psi_{\tilde{S}_n}(t) = \psi_{X_1}^n(t)\psi_\eta(t)$. Следовательно,

$$P\left(\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}} \in [y, y + \Delta n^{-1/2})\right) = \frac{1}{2\pi} \int_y^{y+\Delta n^{-1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\eta\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \psi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) e^{-its} dt ds.$$

Фиксируем $0 < \delta < M$ и разобьем последний интеграл на участки $|t| \leq \delta\sqrt{n}$, $\delta\sqrt{n} < |t| < M\sqrt{n}$. При $\delta < |t| < M$ часть интеграла оценивается сверху величиной

$$\frac{\Delta}{2\pi} \int_{\delta<s<M} q(\delta, M)^n dt = o(n^{-1/2}).$$

Исследуем часть интеграла при $|t| \leq \delta\sqrt{n}$. Разобьем $\psi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t)$ на сумму $e^{-t^2/2}$ и $g_n(t) = \psi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - e^{-t^2/2}$. Из разложения в ряд Тейлора

$$\psi_{X_1}(t) = 1 - t^2/2 + o(t^2),\ \ln\psi_{X_1}(t) = -t^2/2 + o(t^2),\ t \to 0,$$

где в первом соотношении мы воспользовались тем, что $EX_1 = 0$, $DX_1 = 1$. При любом $\varepsilon > 0$ и достаточно малых δ

$$g_n(t) = e^{n \ln \psi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} - e^{-t^2/2} \leq \varepsilon e^{-t^2/2}.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_y^{y+\Delta n^{-1/2}} \int_{|t|<\delta\sqrt{n}} \psi_\eta\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g_n(t) e^{-its} dt ds \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда $P\left(\frac{\tilde{S}_n - \mu n}{\sqrt{n}} \in [y, y + \Delta n^{-1/2}]\right)$ отличается от

$$\frac{1}{2\pi} \int_y^{y+\Delta n^{-1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\eta\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-t^2/2} e^{-its} dt ds$$

меньше чем на $2\varepsilon n^{-1/2}$ при всех достаточно больших n. Величина $\psi_\eta\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ сходится к 0 и мажорируется 1, откуда по теореме о мажорируемой сходимости

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\eta\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-t^2/2} e^{-its} dt \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-its} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}$$

равномерно по s. Отсюда

$$\frac{1}{2\pi} \int_y^{y+\Delta n^{-1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\eta\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-t^2/2} e^{-its} dt ds = o(n^{-1/2}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{y+\Delta n^{-1/2}} e^{-s^2/2} ds = o(n^{-1/2}) + \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-y^2/2}.$$

Итак,

$$P\left(\tilde{S}_n \in [x, x+\Delta]\right) = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2}} + o(n^{-1/2}), \tag{1}$$

причем соотношение (1) равномерно по $x \in [-t\sqrt{n}, t\sqrt{n}]$.
Остается показать, что добавление η не может существенно изменить асимптотики. Для этого заметим, что

$$P\left(\tilde{S}_n \in [x-\delta, x+\Delta+\delta]\right) \geq P(S_n \in [x, x+\Delta, |\eta| < \delta) = P(S_n \in [x, x+\Delta])P(|\eta| < \delta).$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt{n} P(S_n \in [x, x+\Delta]) \leq \frac{\Delta + 2\delta}{\sqrt{2\pi} P(|\eta| < \delta)} e^{-\frac{x^2}{2n}}.$$

Выбирая δ достаточно маленьким, чтобы $\Delta + 2\delta$ было близко к Δ, а M достаточно большим, что $P(|\eta| < \delta)$ близка к 1, имеем требуемую оценку сверху.
Оценка снизу немного сложнее

$$P(S_n \in [x, x+\Delta]) \geq P\left(\tilde{S}_n \in [x+\delta, x-\delta+\Delta]) - P(\tilde{S}_n \in [x+\delta, x-\delta+\Delta], |\eta| \geq \delta\right).$$

Но

$$P\left(\tilde{S}_n \in [x+\delta, x+\Delta-\delta], |\eta| \geq \delta\right) \leq P(|\eta| > \sqrt{n}) + \int_{\delta<|y|<\sqrt{n}} P(\eta \in dy) P(S_n \in [x+\delta-y, x+\Delta-\delta-y) \leq$$

$$P(|\eta| > \sqrt{n}) + \frac{1}{P(|\eta| < \delta)} \int_{\delta<|y|<\sqrt{n}} P\left(\tilde{S}_n \in [x-y, x-y+\Delta]\right) P(\eta \in dy).$$

При этом

$$P(|\eta| > \sqrt{n}) = \int_{|t|>\sqrt{n}} f_\eta(t) dt \leq \int_{|t|>\sqrt{n}} \frac{1}{\pi t^2 M} dt < \frac{1}{M\sqrt{n}}.$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt{n} P\left(\tilde{S}_n \in [x+\delta, x+\Delta-\delta], |\eta| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{M} + \frac{P(|\eta| > \delta)}{P(|\eta| < \delta)} \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}},$$

где мы воспользовались уже показанным (1) и его равномерностью по x из рассматриваемого промежутка. За счет выбора M указанная величина может быть сделана меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$, откуда

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt{n} P(S_n \in [x, x+\Delta]) \geq \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2n}} - \varepsilon,$$

что и требовалось доказать