Пример 9.1. Применим теорему Гартнера-Эллиса к однородной марковской цепи X_n с переходной матрицей P с положительными элементами и конечным числом состояний r.
Марковской цепью называют такую последовательность X_n случайных величин, принимающих значения в конечном или счетном множестве S, что

$$P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})$$

при любых $i_0, ..., i_n \in S$ при которых обе вероятности определены. Однородная марковская цепь — марковская цепь, для которой $p_{i,j} := P(X_n = j | X_{n-1} = i)$ не зависит от n.
Будем считать, что S конечное множество, для определенности $S = \{1, ..., k\}$. В этом случае матрица $P = p_{i,j}$ (переходная матрица) и вектор $\vec{p} = (P(X_0 = i_1), .., P(X_0 = i_k))$ (начальное распределение) задают распределения $(X_1, ..., X_n)$ при всех n:

$$P(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = p_{i_0} p_{i_0,i_1} ... p_{i_{n-1},i_n}.$$

Положим

$$\vec{Z}_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} I_{X_i=j}, j = 1...k \right).$$

Тогда

$$Ee^{n(\vec{h},\vec{Z}_n)} = E \exp \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{n} I_{X_i=j} h_j \right) = \sum_{i_0,...,i_n} p_{i_0} e^{h_{i_0}} \prod_{j=1}^{n} p_{i_{j-1},i_j} e^{h_{i_j}}.$$

Положим $Q = (p_{i,j} e^{h_j})$, $\vec{q} = (p_i e^{h_i})$. Тогда $Ee^{n(\vec{h},\vec{Z}_n)} = \vec{q}^t Q^n \vec{e}$, где $\vec{e} = (1, 1, ..., 1)$.
Если максимальное по модулю собственное значение λ вещественно и единственно, то можно ожидать, что

$$\frac{1}{n} \ln Ee^{n(\vec{h},\vec{Z}_n)} \to \ln \lambda.$$

В нашем случае это верно, так как верна теорема Перрона-Фробениуса:
Теорема Если P — матрица с положительными элементами, то существует собственное значение $\lambda > 0$, такое что
1) Оно имеет кратность 1.
2) Остальные собственные значения не превосходят его по модулю.
3) У соответствующего ему собственного вектора $\vec{e}_\lambda$ все координаты положительны.
Пусть $\vec{e}$ — собственный вектор с положительными координатами. Тогда для любого вектора $\vec{x}$ с положительными координатами найдутся $0 < a < b$, такие что

$$a\vec{e} \le \vec{x} \le b\vec{e},$$

где неравенство между векторами подразумевается в смысле неравенств между каждой компонентой.
Тогда

$$\ln \lambda \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{j=1}^{n} P^n_{i,j} x_j \le \ln \lambda,$$

откуда

$$\frac{1}{n} \ln Ee^{n(\vec{h},\vec{Z}_n)} \to \ln \lambda.$$

В частности, отсюда следует, что собственное значение λ с собственным вектором с положительными координатами единственно.
Здесь $\ln \lambda = \ln \lambda(h)$ оказывается в роли $\ln R(h)$ из теоремы Гартнера-Эллиса.
Она определена на всем пространстве, поэтому условия теоремы выполнены, кроме может быть дифференцируемости функции λ.
Таким образом, $\Lambda(\theta) = \sup_h((\theta, h) - \ln \lambda(h))$. Докажем, что на самом деле она равна

$$\sup_{\vec{u}:u_i>0} \sum_{j=1}^{k} \theta_j \ln \frac{u_j}{(uP)_j}.$$

Действительно, при любом $\vec{u} > 0$ рассмотрим $h_i = \ln(u_i/(uP)_i)$. Тогда

$$(uQ)_j = \sum_{i=1}^{k} u_i p_{i,j} \frac{u_j}{(uP)_j} = u_j,$$

откуда $uQ^n = u$ и значит, $\ln(uQ^n) \to 0$ и $\lambda(h) = 1$ (в силу вышесказанного это единственное с.з. с положительным собственным вектором). При этом

$$\Lambda(\theta) \ge (\theta, h) - \ln \lambda(h) = \sum_{j=1}^{k} \theta_j \ln \frac{u_j}{(uP)_j}.$$

В обратную сторону — рассмотрим h, $\vec{u}$ — левый собственный вектор матрицы Q с максимальным собственным значением. Тогда

$$(\theta, \vec{h}) - \ln \lambda(\vec{h}) = \sum_{j=1}^{k} \theta_j h_j - \sum_{j=1}^{k} \theta_j \ln \lambda(\vec{h}) = \sum_{j=1}^{k} \theta_j \left(h_j - \ln \frac{(uQ)_j}{u_j} \right) = \sum_{j=1}^{k} \theta_j \left(\ln \frac{e^{h_j} u_j}{(uQ)_j} \right) = \sum_{j=1}^{k} \theta_j \ln \frac{u_j}{(uP)_j},$$

откуда имеем нужное соотношение.

Таким образом, конечная однородная цепь Маркова удовлетворяет ПБУ с

$$\Lambda(\theta) = \sup_{\vec{u}: u_i > 0} \sum_{j=1}^{k} \theta_j \ln \frac{u_j}{(uP)_j}.$$