

Рассмотрим несколько примеров применения теорем Крамера.

Пример 8.1. Рассмотрим критерий Неймана-Пирсона проверки простой гипотезы H_0 (X_i имеют плотность $f_0(x)$) с простой альтернативой H_1 (X_i имеют плотность $f_1(x)$). Допустим у нас есть выборка размера n , тогда критерий Неймана-Пирсона предлагает действовать следующим образом:

1) Отвергать гипотезу H_0 , если выборка попала в множество D

$$D = \left\{ \frac{f_1(x_1) \dots f_1(x_n)}{f_0(x_1) \dots f_0(x_n)} > \gamma_n \right\},$$

2) Принимать ее в противном случае.

γ здесь — некоторое заданное число. Предположим, что размер выборки растет, а $\gamma_n = \gamma^n$, γ — фиксированно.

Рассмотрим ошибку первого рода $\alpha_n = P_0((X_1, \dots, X_n) \in D)$, т.е. вероятность того, что гипотеза была верна, а мы ее отвергли. Как ведет себя α_n при $n \rightarrow \infty$?

$$\alpha_n = P_0((X_1, \dots, X_n) \in D) = P_0 \left(\sum_{i=1}^n \ln \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \geq n \ln \gamma \right).$$

Для $Y_1 = \ln \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_1)}$ при гипотезе H_0

$$R(h) = E_0 e^{h \ln \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_1)}} = \int_{\mathbb{R}} e^{h \ln \frac{f_1(x)}{f_0(x)}} f_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_1^h(x) f_0^{1-h}(x) dx.$$

В частности, $R(1) = 1$.

Следовательно, $E_0 Y_1 = \mu < \infty$ (возможно $-\infty$). При $\gamma < \mu$ α_n сходится к 1. При $\gamma > \mu$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \alpha_n = - \inf_{\theta \geq \ln \gamma} \Lambda(\theta) = -\Lambda(\gamma).$$

Если же $\mu > -\infty$, а $\mu < \ln \gamma < m^+$, то в силу теоремы Петрова

$$\alpha_n \sim C(\ln \gamma) n^{-1/2} \exp(-\Lambda(\ln \gamma)n).$$

Аналогично для ошибки второго рода

$$\beta_n = P_1((X_1, \dots, X_n) \notin D) = P_1 \left(\sum_{i=1}^n \ln \frac{f_0(X_i)}{f_1(X_i)} > -n \ln \gamma \right).$$

Тогда

$$\tilde{R}(h) = E_1 e^{-h Y_1} = \int_{\mathbb{R}} f_1^{1-h}(x) f_0^h(x) dx = R(1-h),$$

$\tilde{R}(1) = 1$, $\tilde{\mu} = -E_1 Y_1 < \infty$. Тогда аналогично

$$\beta_n \sim \tilde{C}(-\ln \gamma) n^{-1/2} \exp(-\tilde{\Lambda}(-\ln \gamma)n)$$

при $\ln \gamma > -\tilde{\mu}$. При этом $\tilde{C}(-\ln \gamma) = C(\ln \gamma)$.

$$\tilde{\Lambda}(-\theta) = \inf_h (-\theta h - \ln R(1-h)) = \inf_h (\theta(1-h) - \ln R(1-h)) - \theta = \Lambda(\theta) - \theta.$$

Пример 8.2. Давайте зададимся таким статистическим вопросом для задачи из предыдущего примера. Пусть α_n , β_n — вероятности ошибок I, II родов, a , b — положительные константы, $a + b = 1$. Тогда какой минимальной может быть байесовская ошибка $\Delta_n = a\alpha_n + b\beta_n$? Мы знаем, что наилучшим критерием будет критерий Неймана-Пирсона и наименьшую Δ_n будет давать он.

Рассмотрим критерий Неймана-Пирсона с $\gamma = 1$. Рассмотрим любой другой критерий T_n Неймана-Пирсона с $\gamma_n^{(T)}$. При $\gamma_n^{(T)} \leq 0$ $\alpha_n^{(0)} \leq \alpha_n^{(T)}$, откуда

$$\ln \min_{T_n} \Delta_n \geq \ln(a\alpha_n^{(0)}) = \ln a + \ln \alpha_n^{(0)},$$

при $\gamma_n^{(T)} > 0$

$$\ln \min_{T_n} \Delta_n \geq \ln(b\beta_n^{(0)}) = \ln b + \ln \beta_n^{(0)},$$

Следовательно,

$$\liminf \frac{1}{n} \ln \min_{T_n} \Delta_n \geq -\Lambda(0).$$

При этом на критерии Н-П $\lim \frac{1}{n} \ln \Delta_n = -\Lambda(0)$. Отсюда имеем утверждение — наилучшая возможная байесовская ошибка критерия будет Δ_n с

$$\lim \frac{1}{n} \ln \Delta_n = -\Lambda(0) = \inf_h \ln R(h).$$

Критерий при этом принимает вид

$$\{x_1, \dots, x_n : f_1(x_1) \dots f_1(x_n) > f_0(x_1) \dots f_0(x_n)\},$$

иначе говоря, критерий выбирает ту гипотезу, при которой правдоподобие больше.

Пример 8.3. Рассмотрим следующую задачу. Пусть мы рассматриваем эксперимент с k возможными исходами, имеющими вероятности p_1, \dots, p_k , $\vec{N} = (N_1, \dots, N_k)$ — число исходов каждого типа за n испытаний, $\vec{\nu} = \vec{N}/n$ — частоты каждого исхода. Тогда мы можем задать вопросом насколько вероятно то, что ν попадет в то или иное множество F .

Для результата о больших отклонениях η нам понадобятся векторы $\vec{X}_i \in \mathbb{R}^k$, принимающие одно из значений $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ с вероятностями p_1, \dots, p_k . Тогда $\vec{S}_n = \vec{N}$.

Функция $R(\vec{h}) = \sum_{i=1}^k p_i e^{h_i}$. При этом

$$\text{grad} \ln R(\vec{h}) = \left(\frac{p_i e^{h_i}}{R(\vec{h})}, i \leq k \right).$$

Для применения многомерной теоремы Крамера, нам понадобится такое \vec{h} , что $\text{grad} \ln R(\vec{h}) = \vec{\theta}$, $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$. Тогда

$$\Lambda(\vec{\theta}) = (\vec{\theta}, \vec{h}) - \ln R(\vec{h}) = \sum_{i=1}^k \theta_i h_i - \ln R(\vec{h}).$$

Но $h_i = \ln R(\vec{h}) + \ln(\theta_i/p_i)$, откуда

$$\Lambda(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^k \theta_i h_i - \ln R(\vec{h}) = \sum_{i=1}^k \theta_i \ln \frac{\theta_i}{p_i}.$$

Отсюда в силу теоремы Крамера имеем

$$-\inf_{A^{int}} \Lambda(\vec{\theta}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P(\nu \in A) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P(\nu \in A) \leq -\inf_A \Lambda(\vec{\theta}),$$

где A — какое-либо множество векторов в \mathbb{R}^k с неотрицательными компонентами, в сумме дающими 1. Этот результат называется теоремой Санова.

Можно доказать, что \bar{A} во втором случае не требуется.

Пример 8.4. Применим теорему Санова к задаче проверки гипотезы согласия $H_0 : p_1 = p_1^0, \dots, p_k = p_k^0$, где p_i^0 заданы, с помощью критерия хи-квадрат. Критерий хи-квадрат основан на том факте, что статистика

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i^0)^2}{np_i^0}$$

имеет асимптотическое распределение χ_{k-1}^2 при выполнении гипотезы. Тем самым вероятность $P_0(T(X_1, \dots, X_n) > c)$ аппроксимируется вероятностью $1 - F_{\chi_{k-1}^2}(\cdot)$. Эта аппроксимация довольно точна при c порядка константы, но, скажем, при c порядка n она не является удовлетворительной. В этом случае фактический уровень значимости критерия можно оценить с помощью теоремы Санова

$$\frac{1}{n} \ln P(T(X_1, \dots, X_n) > nc) = \frac{1}{n} \ln P \left(\sum_{i=1}^k \frac{(\nu_i - p_i^0)^2}{p_i^0} > c \right) \rightarrow -\inf_{\vec{\theta} \in A} \sum_{i=1}^k \theta_i \ln \frac{\theta_i}{p_i^0},$$

где $A = \{\theta_i : \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \sum_{i=1}^k \frac{(\theta_i - p_i^0)^2}{p_i^0} > c\}$.

При этом A — внешность эллипсоида

$$\sum_{i=1}^k \frac{(\theta_i - p_i^0)^2}{p_i^0} > c,$$

пересеченная с плоскостью $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$. Нетрудно убедиться, что минимум достигается на границе, то есть

$$\sum_{i=1}^k \frac{(\theta_i - p_i^0)^2}{p_i^0} = c.$$

Полученная задача достаточно сложна для аналитической работы, но может быть решена численно.