

Рассмотрим несколько примеров применения теорем Крамера.

**Пример 8.1.** Рассмотрим критерий Неймана-Пирсона проверки простой гипотезы  $H_0$  ( $X_i$  имеют плотность  $f_0(x)$ ) с простой альтернативой  $H_1$  ( $X_i$  имеют плотность  $f_1(x)$ ). Допустим у нас есть выборка размера  $n$ , тогда критерий Неймана-Пирсона предлагает действовать следующим образом:

1) Отвергать гипотезу  $H_0$ , если выборка попала в множество  $D$

$$D = \left\{ \frac{f_1(x_1) \dots f_1(x_n)}{f_0(x_1) \dots f_0(x_n)} > \gamma_n \right\},$$

2) Принимать ее в противном случае.

$\gamma$  здесь — некоторое заданное число. Предположим, что размер выборки растет, а  $\gamma_n = \gamma^n$ ,  $\gamma$  — фиксированно.

Рассмотрим ошибку первого рода  $\alpha_n = P_0((X_1, \dots, X_n) \in D)$ , т.е. вероятность того, что гипотеза была верна, а мы ее отвергли. Как ведет себя  $\alpha_n$  при  $n \rightarrow \infty$ ?

$$\alpha_n = P_0((X_1, \dots, X_n) \in D) = P_0 \left( \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \geq n \ln \gamma \right).$$

Для  $Y_1 = \ln \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_1)}$  при гипотезе  $H_0$

$$R(h) = E_0 e^{h \ln \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_1)}} = \int_{\mathbb{R}} e^{h \ln \frac{f_1(x)}{f_0(x)}} f_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_1^h(x) f_0^{1-h}(x) dx.$$

В частности,  $R(1) = 1$ .

Следовательно,  $E_0 Y_1 = \mu < \infty$  (возможно  $-\infty$ ). При  $\gamma < \mu$   $\alpha_n$  сходится к 1. При  $\gamma > \mu$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \alpha_n = - \inf_{\theta \geq \ln \gamma} \Lambda(\theta) = -\Lambda(\gamma).$$

Если же  $\mu > -\infty$ , а  $\mu < \ln \gamma < m^+$ , то в силу теоремы Петрова

$$\alpha_n \sim C(\ln \gamma) n^{-1/2} \exp(-\Lambda(\ln \gamma)n).$$

Аналогично для ошибки второго рода

$$\beta_n = P_1((X_1, \dots, X_n) \notin D) = P_1 \left( \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_0(X_i)}{f_1(X_i)} > -n \ln \gamma \right).$$

Тогда

$$\tilde{R}(h) = E_1 e^{-h Y_1} = \int_{\mathbb{R}} f_1^{1-h}(x) f_0^h(x) dx = R(1-h),$$

$\tilde{R}(1) = 1$ ,  $\tilde{\mu} = -E_1 Y_1 < \infty$ . Тогда аналогично

$$\beta_n \sim \tilde{C}(-\ln \gamma) n^{-1/2} \exp(-\tilde{\Lambda}(-\ln \gamma)n)$$

при  $\ln \gamma > -\tilde{\mu}$ . При этом  $\tilde{C}(-\ln \gamma) = C(\ln \gamma)$ .

$$\tilde{\Lambda}(-\theta) = \inf_h (-\theta h - \ln R(1-h)) = \inf_h (\theta(1-h) - \ln R(1-h)) - \theta = \Lambda(\theta) - \theta.$$

**Пример 8.2.** Давайте зададимся таким статистическим вопросом для задачи из предыдущего примера. Пусть  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  — вероятности ошибок I, II родов,  $a$ ,  $b$  — положительные константы,  $a + b = 1$ . Тогда какой минимальной может быть байесовская ошибка  $\Delta_n = a\alpha_n + b\beta_n$ ? Мы знаем, что наилучшим критерием будет критерий Неймана-Пирсона и наименьшую  $\Delta_n$  будет давать он.

Рассмотрим критерий Неймана-Пирсона с  $\gamma = 1$ . Рассмотрим любой другой критерий  $T_n$  Неймана-Пирсона с  $\gamma_n^{(T)}$ . При  $\gamma_n^{(T)} \leq 0$   $\alpha_n^{(0)} \leq \alpha_n^{(T)}$ , откуда

$$\ln \min_{T_n} \Delta_n \geq \ln(a\alpha_n^{(0)}) = \ln a + \ln \alpha_n^{(0)},$$

при  $\gamma_n^{(T)} > 0$

$$\ln \min_{T_n} \Delta_n \geq \ln(b\beta_n^{(0)}) = \ln b + \ln \beta_n^{(0)},$$

Следовательно,

$$\liminf \frac{1}{n} \ln \min_{T_n} \Delta_n \geq -\Lambda(0).$$

При этом на критерии Н-П  $\lim \frac{1}{n} \ln \Delta_n = -\Lambda(0)$ . Отсюда имеем утверждение — наилучшая возможная байесовская ошибка критерия будет  $\Delta_n$  с

$$\lim \frac{1}{n} \ln \Delta_n = -\Lambda(0) = \inf_h \ln R(h).$$

Критерий при этом принимает вид

$$\{x_1, \dots, x_n : f_1(x_1) \dots f_1(x_n) > f_0(x_1) \dots f_0(x_n)\},$$

иначе говоря, критерий выбирает ту гипотезу, при которой правдоподобие больше.

**Пример 8.3.** Рассмотрим следующую задачу. Пусть мы рассматриваем эксперимент с  $k$  возможными исходами, имеющими вероятности  $p_1, \dots, p_k$ ,  $\vec{N} = (N_1, \dots, N_k)$  — число исходов каждого типа за  $n$  испытаний,  $\vec{\nu} = \vec{N}/n$  — частоты каждого исхода. Тогда мы можем задать вопросом насколько вероятно то, что  $\nu$  попадет в то или иное множество  $F$ .

Для результата о больших отклонениях  $\eta$  нам понадобятся векторы  $\vec{X}_i \in \mathbb{R}^k$ , принимающие одно из значений  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$  с вероятностями  $p_1, \dots, p_k$ . Тогда  $\vec{S}_n = \vec{N}$ .

Функция  $R(\vec{h}) = \sum_{i=1}^k p_i e^{h_i}$ . При этом

$$\text{grad} \ln R(\vec{h}) = \left( \frac{p_i e^{h_i}}{R(\vec{h})}, i \leq k \right).$$

Для применения многомерной теоремы Крамера, нам понадобится такое  $\vec{h}$ , что  $\text{grad} \ln R(\vec{h}) = \vec{\theta}$ ,  $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$ . Тогда

$$\Lambda(\vec{\theta}) = (\vec{\theta}, \vec{h}) - \ln R(\vec{h}) = \sum_{i=1}^k \theta_i h_i - \ln R(\vec{h}).$$

Но  $h_i = \ln R(\vec{h}) + \ln(\theta_i/p_i)$ , откуда

$$\Lambda(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^k \theta_i h_i - \ln R(\vec{h}) = \sum_{i=1}^k \theta_i \ln \frac{\theta_i}{p_i}.$$

Отсюда в силу теоремы Крамера имеем

$$-\inf_{A^{int}} \Lambda(\vec{\theta}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P(\nu \in A) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P(\nu \in A) \leq -\inf_A \Lambda(\vec{\theta}),$$

где  $A$  — какое-либо множество векторов в  $\mathbb{R}^k$  с неотрицательными компонентами, в сумме дающими 1. Этот результат называется теоремой Санова.

Можно доказать, что  $\bar{A}$  во втором случае не требуется.

**Пример 8.4.** Применим теорему Санова к задаче проверки гипотезы согласия  $H_0 : p_1 = p_1^0, \dots, p_k = p_k^0$ , где  $p_i^0$  заданы, с помощью критерия хи-квадрат. Критерий хи-квадрат основан на том факте, что статистика

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i^0)^2}{np_i^0}$$

имеет асимптотическое распределение  $\chi_{k-1}^2$  при выполнении гипотезы. Тем самым вероятность  $P_0(T(X_1, \dots, X_n) > c)$  аппроксимируется вероятностью  $1 - F_{\chi_{k-1}^2}(\cdot)$ . Эта аппроксимация довольно точна при  $c$  порядка константы, но, скажем, при  $c$  порядка  $n$  она не является удовлетворительной. В этом случае фактический уровень значимости критерия можно оценить с помощью теоремы Санова

$$\frac{1}{n} \ln P(T(X_1, \dots, X_n) > nc) = \frac{1}{n} \ln P\left(\sum_{i=1}^k \frac{(\nu_i - p_i^0)^2}{p_i^0} > c\right) \rightarrow -\inf_{\vec{\theta} \in A} \sum_{i=1}^k \theta_i \ln \frac{\theta_i}{p_i^0},$$

где  $A = \{\theta_i : \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \sum_{i=1}^k \frac{(\theta_i - p_i^0)^2}{p_i^0} > c\}$ .

При этом  $A$  — внешность эллипсоида

$$\sum_{i=1}^k \frac{(\theta_i - p_i^0)^2}{p_i^0} > c,$$

пересеченная с плоскостью  $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$ . Нетрудно убедиться, что минимум достигается на границе, то есть

$$\sum_{i=1}^k \frac{(\theta_i - p_i^0)^2}{p_i^0} = c.$$

Полученная задача достаточно сложна для аналитической работы, но может быть решена численно.