Спецкурс "Большие уклонения". Программа коллоквиума

Шкляев А.В.

8 января 2017 г.

Теоретические вопросы

1. Сопряженное распределение, его свойства, математическое ожидание и дисперсия. Определение h_θ. Формулировка теоремы Петрова.
2. Доказательство теоремы Петрова. Теорема Бартфаи и ее вероятностный смысл.
3. Определение ПБУ. Функции $R(h)$, $\Lambda(x)$ в случае $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$ и их свойства. Примеры.
4. Теорема Крамера для конечного μ в одномерном случае. Формулировка. Доказательство оценки сверху.
5. Теорема Крамера для конечного μ в одномерном случае. Формулировка. Доказательство оценки снизу.
6. Теорема Крамера для конечного μ в многомерном случае. Формулировка. Доказательство оценки сверху.
7. Теорема Крамера для конечного μ в многомерном случае. Формулировка. Доказательство оценки снизу.
8. Теорема Санова. Формулировка и доказательство.
9. Теорема Гартнер-Эллис. Формулировка. Доказательство оценки сверху.
10. Теорема Гартнер-Эллис. Формулировка. Доказательство оценки снизу.
11. Теорема о больших уклонениях для конечной цепи Маркова.

Задачи.

1. Найти асимптотику вероятностей больших уклонения $P(S_n \geq \theta n)$ для случая:
а) $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, б) $X_i \sim Gamma(a, \lambda)$.
2. Записать ПБУ для S_n/n, если X_i имеют распределения:
а) $X_i \sim Cauchy$, б) $X_i \sim \exp(\lambda)$, в) $X_i \sim Poiss(\lambda)$, г) $X_i \sim Geom(p)$.
3. $\vec{X}_i \sim \mathcal{N}(0, \Sigma^2)$, где Σ имеет собственные значения $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Найти грубую асимптотику вероятности $P(S_n/n \in U)$, где U — внешность единичного шара (удобно воспользоваться тем, что $\vec{X} = A\vec{Y}$, $\vec{Y}$ — вектор с н.о.р. $\mathcal{N}(0,1)$ компонентами).
4. Найти минимальное предельное значение $n^{-1} \ln \Delta n$ для критериев проверки $H_0 : X_i \sim \exp(\lambda)$, $H_1 : X_i \sim \exp(\mu)$.
5. Написать теорему о б.у. для $\sum_{i=1}^{n} f(i/n)X_i$, где X_i — н.о.р. с $R(h)$, f — непрерывная функция.
6. Написать теорему о б.у. для $\sum_{i=1}^{Y_1+...+Y_n} X_i$, где X_i н.о.р. с $R(h)$, Y_i не зависят от X_i н.о.р. с $R_1(h)$.
7. Пусть $X_1, ..., X_n, ...$ — гауссовская стационарная последовательность с нулевым средним и ковариационной функцией $R(i)$, т.е. $(X_1, ..., X_k)$ при любом k гауссовский вектор с нулевым средним и ковариацией $cov(X_i, X_{i+j}) = R(j)$. Предположим, что R удовлетворяет условию

$$\sum_{i=-n}^{n} (1 - |i|/n) R(i) \to R, \ n \to \infty.$$

Показать, что S_n/n удовлетворяют ПБУ с $\Lambda(\theta) = R\theta^2/2$.