В случае большей размерности верна аналогичная теорема Крамера. Рассмотрим н.о.р. случайные векторы $X_i \in \mathbb{R}^d$, $\vec{S}_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Положим

$$R(\vec{h}) = Ee^{(\vec{h},\vec{X})},\ \vec{h} \in \mathbb{R}^d,\ \Lambda(\vec{\theta}) = \sup_{\vec{h}}((\vec{h},\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h})),\ \vec{\theta} \in \mathbb{R}^d.$$

Лемма 7.1. а) $\ln R$ — выпуклая дифференцируемая функция, Λ — выпуклая функция роста.
б) Если $\vec{\theta} = grad \ln R(\vec{h})$, то $\Lambda(\vec{\theta}) = (\vec{h},\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h})$.
Доказательство пункта а) полностью повторяет доказательство для одномерного случая.
Для доказательства пункта б) будем действовать напрямую. Заметим, что

$$(\vec{h}_1,\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h}_1) = (\vec{h},\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h}) + (\vec{h}_1 - \vec{h},\vec{\theta}) - (\ln R(\vec{h}_1) - \ln R(\vec{h})) = (\vec{h},\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h}) - \left(\ln R(\vec{h}_1) - \ln R(\vec{h}) - grad \ln R(h)(\vec{h}_1 - \vec{h})\right).$$

В силу выпуклости $\ln R$ имеем требуемое.
Заметим также, что справедливо следующее неравенство: при любой функции f, т.ч. $Ef(\vec{X}) < \infty$, $f(\vec{X}) \geq 0$,

$$P(\vec{X} \in A) \leq \frac{Ef(\vec{X})}{\inf_{\vec{x}\in A} f(\vec{x})}.$$

Доказательство аналогично неравенству Маркова

$$Ef(\vec{X}) \geq E(f(\vec{X}); A) = \int_{\vec{x}\in A} f(\vec{x}) P(\vec{X} \in d\vec{x}) \geq \inf_{\vec{x}\in A} f(\vec{x}) P(\vec{X} \in d\vec{x}).$$

Теорема 7.1. (Крамера, в $\mathbb{R}^d$) Пусть $\vec{S_n}$ — случайное блуждание с шагами $\vec{X_i} \in \mathbb{R}^d$ с $R(\vec{h}) = Ee^{(\vec{h},\vec{X})} < \infty$, $\vec{h} \in \mathbb{R}^d$. Предположим, что $\ln R$ дифференцируема на всем пространстве. Тогда меры $P(S_n/n \in \cdot)$ удовлетворяют ПБУ с $\Lambda(\vec{\theta}) = \sup_{\vec{h}}((\vec{h},\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h}))$.
Доказательство Теоремы 7.1. Условие Крамера на всем $\mathbb{R}^d$ здесь, на самом деле, исключительно для удобства доказательства и может быть значительно ослаблено.

1) Докажем верхнюю оценку: для любого замкнутого F

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n \in F\right) \leq -\inf_{\vec{\theta}\in F} \Lambda(\vec{\theta}).$$

1.1) Пусть F компакт. Заметим, что для любых $\vec{\theta}$, $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta = \delta(\vec{\theta}) > 0$, $\vec{h}$, такие что $\Lambda(\vec{\theta}) \leq (\vec{\theta},\vec{h}) - \ln R(\vec{h}) + \varepsilon$, $|\vec{h}|\delta < \varepsilon$. Тогда

$$P\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n \in U_\delta(\vec{\theta})\right) \leq \frac{Ee^{\left(\vec{h}n,\frac{1}{n}\vec{S}_n\right)}}{\inf_{\vec{x}\in U_\delta(\vec{\theta})} e^{(\vec{h}n,\vec{x})}} = R(\vec{h})^n e^{-n(\vec{h},\vec{\theta})} e^{n|\vec{h}|\delta} \leq e^{2n\varepsilon} e^{-\Lambda(\vec{\theta})n}.$$

Для каждой точки $\vec{\theta} \in F$ рассмотрим $U_{\delta(\vec{\theta})}(\vec{\theta})$. Тогда мы имеем покрытие компакта F такими окрестностями, из которого можно выбрать конечное подпокрытие, центры окрестностей которого мы назовем $\vec{\theta_i}$, $i \leq N$. Имеем

$$P\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n \in F\right) \leq e^{2n\varepsilon} \sum_{i=1}^N \exp(-\Lambda(\vec{\theta}_i)) \leq N e^{2n\varepsilon} \exp(-\inf_{\vec{\theta}\in F} \Lambda(\vec{\theta})),$$

откуда

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n \in F\right) \leq 2\varepsilon - \inf_{\vec{\theta}\in F} \Lambda(\vec{\theta}).$$

В силу произвольности ε требуемое в 1.1) утверждение доказано.
1.2) Предположим, что F — произвольное замкнутое множество, рассмотрим $F_M = F \cap [-M,M]^n$. Тогда в силу 1.1)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n \in F_M\right) \leq -\inf_{\vec{\theta}\in F} \Lambda(\vec{\theta}).$$

При этом

$$P\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n \in F \setminus F_M\right) \leq \sum_{i=1}^d P(S_{n,i} \geq Mn) + \sum_{i=1}^d P(S_{n,i} \leq -Mn),$$

где $S_{n,i}$ — i-ая компонента $\vec{S}_n$. Поскольку $S_{n,i}$ удовлетворяет условию Крамера на всей прямой, оно имеет конечное матожидание μ_i и $\Lambda_i(\theta_i)$ стремится к бесконечности при $\theta_i \to \pm\infty$. Следовательно, если $I_F = \inf_{\vec{\theta}\in F} \Lambda(\vec{\theta}) < \infty$, то M может быть выбрано достаточно большим, чтобы $\Lambda_i(M) > I_F$, $\Lambda_i(-M) > I_F$ при всех i и значит

$$P(S_{n,i} \geq Mn) \leq \exp(-I_F n),\ P(S_{n,i} \leq -Mn) \leq \exp(-I_F n),$$

при всех достаточно больших M, n, откуда

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n\in F\right)\le\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(P\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n\in F_M\right)+2d\exp(-I_F n)\right)\le -I_F.$$

В случае $I_F=\infty$ для любого t и достаточно больших t

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n\in F\right)\le\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(P\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n\in F_M\right)+2d\exp(-tn)\right)\le -t,$$

откуда в силу произвольности t имеем требуемое.

2) Докажем нижнюю оценку — для всех открытых G

$$\liminf\frac{1}{n}\ln P\left(\frac{1}{n}\vec{S}_n\in G\right)\ge -\inf_{\vec{\theta}\in G}\Lambda(\vec{\theta}).$$

Аналогично одномерному случаю достаточно доказать, что при любом $\vec{x}$

$$\frac{1}{n}\ln P(\vec{S}_n/n\in U_\delta(\vec{x}))\ge -\Lambda(\vec{x}).$$

2.1) Предположим, что sup в определении $\Lambda(\vec{x})$ достигается в некоторой точке $\vec{h}$. Тогда $\vec{x}=grad\ln R(\vec{h})$ при некотором $\vec{h}\in\mathbb{R}^d$. Рассмотрим меру

$$P(\vec{S}_n^{(\vec{h})}\in A)=R(\vec{h})^{-n}\int_A e^{(\vec{h},\vec{y})}P(\vec{S}_n\in d\vec{y}).$$

Случайное блуждание $\vec{S}_n^{(\vec{h})}$ имеет шаги со средним

$$R(\vec{h})^{-1}\int_{\mathbb{R}}\vec{y}e^{(\vec{h},\vec{y})}P(\vec{X}\in d\vec{y})=\frac{gradR(\vec{h})}{R(\vec{h})}=grad\ln R(\vec{h})=\vec{x}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{n}\ln P(\vec{S}_n/n\in U_\delta(\vec{x}))=\frac{1}{n}\ln\left(R(\vec{h})^n\int_{U_\delta(\vec{x})}e^{-n(\vec{h},\vec{y})}P(\vec{S}_n^{(\vec{h})}/n\in d\vec{y})\right)\ge\ln R(\vec{h})-(\vec{h},\vec{x})-\frac{1}{n}\ln\left(e^{-n\delta|\vec{h}|}P(\vec{S}_n^{(\vec{h})}/n\in d\vec{y})\right),$$

где последнее слагаемое сходится к $-\delta|\vec{h}|$ при $n\to\infty$ в силу ЗБЧ.

2.2) В общем случае рассмотрим $\vec{Z}_i=\vec{X}_i+\vec{Y}_i$, $\vec{S}_n^Z=\vec{Z}_1+...+\vec{Z}_n$, $\vec{Y}_i\sim\mathcal{N}(\vec{0},E/M)$ н.о.р., $M>0$, E — единичная матрица. Тогда

$$\ln R_Z(\vec{h})=\ln R(\vec{h})+\frac{1}{2M}|\vec{h}|^2\ge\ln R(\vec{h}),\ \Lambda_Z(\vec{x})\le\Lambda(\vec{x}).$$

При этом $\ln R(\vec{h})\ge(\vec{h},\vec{\mu})$, где $\vec{\mu}=E\vec{X}$ существует в силу выполнения условия Крамера на всем $\mathbb{R}^d$, а значит

$$(\vec{h},\vec{x})-\ln R_Z(\vec{h})\le(\vec{h},(\vec{x}-\vec{\mu}))-\frac{1}{2M}|\vec{h}|^2\to-\infty,$$

$h\to\infty$. Следовательно, супремум в $\Lambda_M(\vec{\theta})$ достижим в конкретной точке $\vec{h}$, удовлетворяющей условию $\vec{x}=grad\ln R_Z(\vec{h})$. В силу 2.1)

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P(\vec{S}_n^Z/n\in U_{\delta/2}(\vec{x}))\ge-\Lambda_Z(\vec{x})\ge-\Lambda(\vec{x}).$$

При этом

$$P(\vec{S}_n/n\in U_\delta(\vec{x}))\ge P(\vec{S}_n^Z/n\in U_{\delta/2}(\vec{x}))-P(|\vec{S}_n^Y/n|>\delta/2).$$

Модуль вектора больше $\delta/2$ только если одна из координат больше по модулю $\delta/(2\sqrt{d})$. Значит

$$P(|\vec{S}_n^Y/n|>\delta/2)\le 2d\left(1-\Phi\left(\frac{\delta^2\sqrt{nM}}{2d}\right)\right).$$

В силу соотношения

$$\Phi(x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x^2/2},$$

имеем $\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P((Y_1+...+Y_n)/n>\delta/2)\le -M\delta^2/(2d)$. Аналогично рассуждениям пункта 1.2), отсюда следует требуемое утверждение.

Пример 7.1. Как выглядит $\Lambda(\vec{\theta})$ при $\vec{\theta}\in\mathbb{R}^d$, если $\vec{X}=(X_1,...,X_d)$ — вектор с независимыми компонентами. Тогда

$$R(\vec{h})=Ee^{\sum_{i=1}^d h_iX_i}=\prod_{i=1}^d R_i(h_i),\ \ln R(\vec{h})=\sum_{i=1}^d\ln R_i(h_i),\ \Lambda(\theta)=\sum_{i=1}^d\Lambda_i(\theta_i).$$

Пример 7.2. Рассмотрим задачу оценивания среднего $\vec{\mu}$ по выборке $\vec{X}_i$, $i = 1...n$, $E\vec{X}_i = \vec{\mu}$. Допустим при большой выборке $\vec{X}_i$ мы заметили, что $\overline{X}$ и $\vec{\mu}$ отличаются более чем на ε, например, в $\mathbb{R}^d$. Насколько уверенно мы можем сказать, что $\vec{X}$ имеет другое среднее?
Обычно мы используем для этого ЦПТ

$$P\left(\left|\left|\frac{\overline{X}-\vec{\mu}}{\sqrt{n}}\right|\right| \geq x\right) \to P(||\vec{Y}|| \geq x),$$

где $\vec{Y} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma^2)$, Σ^2 — матрица ковариации $\vec{X}$.
Но, вообще говоря, нельзя использовать это как оценку для $P(||\overline{X} - \vec{\mu}|| > \varepsilon)$, поскольку ЦПТ верна при $\varepsilon = O(n^{-1/2})$ но не при $O(1)$. Таким образом, видя большое отклонение $\overline{X}$ и μ, мы не можем оценить вероятность этого исхода из ЦПТ. Зато можем с помощью теоремы Крамера:

$$\frac{1}{n}\ln P(||\overline{X} - \vec{\mu}|| \geq \varepsilon) \to -\inf_{\vec{\theta} \notin \mathbb{R}^d \setminus U_\varepsilon(\vec{\mu})} \Lambda(\vec{\theta}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\Lambda(\vec{\theta})$ на внешности открытого и замкнутого шаров имеет один и тот же инфимум. Теорема Крамера, таким образом, позволит нам оценить фактический уровень значимости нашей гипотезы более правильным образом.