Спецкурс "Большие уклонения"

Шкляев А.В.

7 ноября 2016 г.

Теорема Крамера

Лемма 3.1. 1) $\ln R$ выпукла, Λ выпуклая функция роста.
2) Если $D_R = \emptyset$, то $\Lambda(\theta) = 0$. Если $R(\tilde{h}) < \infty$ при некотором $\tilde{h} > 0$, то существует $\mu = EX$ (возможно минус бесконечное)и $\Lambda(\theta)$ при $\theta > \mu$ неубывает. Аналогично при $R(\tilde{h}) > -\infty$ при некотором $\tilde{h} < 0$, то существует $\mu = EX$ (возможно бесконечное) и $\Lambda(\theta)$ при $\theta < \mu$ невозрастает. При этом $\Lambda(\mu) = 0$.
3) Во внутренних точках D_R $R(\cdot)$ дифференцируема и $R'(h) = EX_1 e^{hX_1}$, $\Lambda'(\theta) = y$ и $\Lambda(\theta) = y\theta - \ln R(y)$.
Доказательство.
1) Надо доказать, что $\ln R(h_1 t_1 + h_2 t_2) \le \ln R(h_1)t_1 + \ln R(h_2)t_2$ при любых положительных $t_1 + t_2 = 1$.
Но

$$R(h_1 t_1 + h_2 t_2) = E\left(e^{h_1 X_1}\right)^{t_1}\left(e^{h_2 X_1}\right)^{t_2} \le \left(Ee^{h_1 X_1}\right)^{t_1}\left(Ee^{h_1 X_1}\right)^{t_2}$$

в силу неравенства Гельдера. Аналогичное утверждение для $\Lambda(\theta)$ следует из неравенства

$$\sup_h(h\theta_1 t_1 + h\theta_2 t_2 - \ln R(h\theta_1 t_1) - \ln R(h\theta_2 t_2)) \le t_1 \sup_h h\theta_1 - \ln R(h\theta_1) + t_2 \sup_h h\theta_2 - \ln R(h\theta_2).$$

То, что Λ функция роста прямо следует из определения. Действительно,

$$\Lambda(\theta_0) = \sup_h(h\theta_0 - \ln R(h)) \le h_1\theta_0 - \ln R(h_1) + \varepsilon = \liminf_{\theta\to\theta_0}(h_1\theta - \ln R(h_1)) + \varepsilon$$

при любом ε и некотором $h_1(\varepsilon)$. Последний предел очевидно не превосходит $\liminf_{\theta\to\theta_0}\Lambda(\theta)$, откуда вытекает непрерывность снизу.
Неотрицательность Λ следует из того, что $h\theta - \ln R(h) \ge 0\theta - \ln R(0) = 0$.
2) В силу неравенства Иенсена $\ln R(h) \ge hEX_1$, откуда вытекает существование EX и $\Lambda(\mu) = 0$. Докажем монотонность. Рассмотрим $\theta h - \ln R(h)$. При $\theta > \mu$ и $h < 0$ $h\theta - \ln R(h) \le h\mu - \ln R(h) \le 0$, т.е. супремум достигается на положительных h. Но тогда при $\theta_2 > \theta_1 > \mu$

$$\Lambda(\theta_2) = \sup_{h>0}(h\theta_2 - \ln R(h)) > \sup_{h>0}(h\theta_1 - \ln R(h)) = \Lambda(\theta_1).$$

Значит Λ монтонно возрастает по θ. Аналогично при $\theta < \mu$.
При $\mu = -\infty$ $R(h) = \infty$, $h < 0$ в силу неравенства Иенсена. Отсюда опять же $\theta h - \ln R(h)$ достигает максимума при положительных h и, следовательно, возрастает по h. При этом

$$\Lambda(\theta) = \sup_{h\ge 0}(\theta h - \ln R(h)) = -\inf_{h\ge 0}\ln Ee^{h(X-\theta)} \le -\ln P(X \ge \theta).$$

Отсюда $\Lambda(\theta) \to 0$, $\theta \to -\infty$.
3) Для любой внутренней точки $\hat{h}$ D_R, $R(h)$ равномерно сходится на $[0, \hat{h}]$. Тогда ее можно дифференцировать под знаком интеграла, откуда и вытекают искомые формулы.

Теперь давайте покажем, что теорема Крамера верна в следующей формулировке:

Теорема 3.1. (Крамера, настоящая формулировка) Пусть S_n — случайное блуждание с $R(h) = Ee^{hX}$ (это матожидание всегда существует, возможно являясь бесконечным). Тогда меры $P(S_n/n \in \cdot)$ удовлетворяют ПБУ с $\Lambda(x) = \sup_h(hx - \ln R(h))$.

Эта формулировка может показаться удивительной — ведь мы не накладываем на блуждание никаких условий. А как же величины с неэкспоненциальными хвостами? Ответ прост, если хвосты, скажем, степенные, то $\Lambda(x)$ окажется равной 0 (т.к. при $h \ne 0$ выражение под супремумом есть $-\infty$) и мы просто заявим, что $\ln P(S_n \in A)/n \to \infty$, т.е. эти вероятности убывают медленнее чем экспоненциально.

Если предположить, что условие Крамера все же выполняется на $(0, h^+)$ и положить m^+ также как и раньше, то окажется, что при $x \in (\mu, m^+)$ $\Lambda(x)$ осталось той же, что и раньше, как мы видим из Леммы. Поэтому ничего критического не произошло и эта версия теоремы Крамера не противоречит предыдущей.

Доказательство Теоремы 3.1. 1) Докажем верхнюю оценку — для любого замкнутого F

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln P(S_n/n \in F)}{n} \le -\inf_{\theta\in F}\Lambda(\theta).$$

Если $D_R = \{0\}$, то утверждение очевидно, поскольку левая часть неположительна, а правая 0. Значит, мы можем считать, что найдется $\mu = EX$, конечное или бесконечное. Если $\inf_{\theta\in F}\Lambda(\theta) = 0$, то опять же утверждение тривиально. Поэтому можем считать, что $\inf_{\theta\in F}\Lambda(\theta) = c > 0$. При этом

$$P(S_n \ge \theta n) \le e^{-\theta h n}Ee^{hS_n} = e^{-(\theta h - \ln R(h))n} = e^{-n\sup_{h>0}(\theta h - \ln R(h))}$$

и аналогично $P(S_n \le \theta n) \le e^{-n\sup_{h<0}(\theta h - \ln R(h))}$ а) Пусть $\mu = -\infty$. Тогда F ограничено снизу (иначе $c = 0$), $\inf F = a > -\infty$. Тогда

$$P(S_n/n \in F) \le P(S_n \ge an) \le \exp(-\Lambda(a)) = \exp(-\inf_{\theta\in F}\Lambda(\theta)),$$

где мы воспользовались тем, что sup в $\Lambda(a)$ достигается при полож Аналогично разбирается случай $\mu=\infty$.
б) Пусть μ конечно. Тогда положим $a^-=\sup F\cap(-\infty,\mu)$, $a^+=\sup F\cap(\mu,\infty)$, $a^-<\mu<a^+$.

$$P(S_n/n\in F)\le P(S_n\ge a^+n)+P(S_n\le a^-n)\le \exp(-\Lambda(a^+)n)+\exp(-\Lambda(a^-)n),$$

где мы воспользовались тем, что в $\Lambda(\theta)$ при $\theta>\mu$ супремум достигается при положительных h, а при $\theta<\mu$ при отрицательных. Тогда

$$\frac{\ln P(S_n/n\in F)}{n}\le\frac{\ln 2}{n}-min(\Lambda(a^+),\Lambda(a^-))\le\frac{\ln 2}{n}-\inf_{\theta inF}\Lambda(\theta).$$

Оценка сверху доказана.

2) Докажем верхнюю оценку — для любого открытого G

$$\lim\inf_{n\to\infty}\frac{\ln P(S_n/n\in G)}{n}\ge-\inf_{\theta\in G}\Lambda(\theta).$$

Покажем, что достаточно показать, что при любых $\theta\in G$, $\delta>0$

$$\lim\inf_{n\to\infty}\frac{\ln P(S_n/n\in(\theta-\delta,\theta+\delta))}{n}\ge-\Lambda(\theta).$$

Действительно, при любом ε и некотором $\theta\in G$ верно неравенство $\inf_{x\in G}\Lambda(x)\ge\Lambda(\theta)-\varepsilon$, откуда при достаточно малых δ

$$\ln P(S_n/n\in G)\ge\ln P(S_n/n\in(\theta-\delta,\theta+\delta)\ge-\Lambda(\theta)\ge-\varepsilon-\inf_{x\in G}\Lambda(x).$$

В силу произвольности ε имеем требуемое.

Заметим, что достаточно доказать для $\theta=0$, поскольку любые другие величины можно сдвинуть с помощью $X-\theta$. Тогда рассмотрим несколько случаев:
а) Пусть $D_R=\mathbb{R}$, распределение сосредоточено на некотором отрезке $[-a,a]$, причем не сосредоточно на одной отрицательной или положительной полуосях. Тогда $R(h)\to\infty$, $|h|\to\infty$, поскольку функция определена на всей прямой, непрерывна и выпукла вниз. Тогда найдется такое $\tilde{h}$, что $\inf_{h\in\mathbb{R}}R(h)=R(\tilde{h})$, $R'(\tilde{h})=0$. Тогда $\Lambda(0)=-\ln R(\tilde{h})$ и

$$P(S_n/n\in(-\delta,\delta))=R^n(\tilde{h})\int_{-\delta,\delta}e^{-\tilde{h}tn}P(S_n^{(\tilde{h})}/n\in dt)\ge R^n(\tilde{h})e^{-|\tilde{h}|\delta n}P(S_n^{(\tilde{h})}\in(-\delta n,\delta n)).$$

При этом $EX^{(\tilde{h})}=m(\tilde{h})=0$, откуда в силу ЗБЧ $P(S_n^{(\tilde{h})}\in(-\delta n,\delta n))\to 1$ при $n\to\infty$, откуда

$$\lim\inf_{n\to\infty}\frac{\ln P(S_n/n\in(-\delta,\delta))}{n}\ge\lim\inf_{n\to\infty}\frac{\ln P(S_n/n\in(-\tilde{\delta},\tilde{\delta}))}{n}\ge-|\tilde{h}|\tilde{\delta}+\ln R(\tilde{h}).$$

Тогда в силу произвольности $\tilde{\delta}$ имеем требуемую оценку.

б) Пусть распределение не сосредоточно на одной отрицательной или положительной полуосях. Фиксируем t и рассмотрим

$$Q_n((-\delta,\delta))=P(S_n/n\in(-\delta,\delta)|X_i\in[-t,t],i\le n)=P(S_n/n\in(-\delta,\delta),X_i\in[-t,t])P(X_i\in[-t,t])^{-n}.$$

К Q_n можно применить пункт а), откуда

$$\liminf_{n\to\infty}\ln Q_n((-\delta,\delta))/n\ge-\Lambda_t(0),$$

где $\Lambda_t(0)=\inf_h E(e^{hX}|X\in[-t,t])$. Тогда

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\ln P(S_n/n\ge(-\delta,\delta))}{n}\ge-\ln P(X_1\in[-t,t])-\Lambda_t(0).$$

При $t\to\infty$ правая часть стремится к $-\Lambda(0)$, что и требуется.

в) Пусть распределение сосредоточено на одной из полуосей, для определенности на правой. Тогда $R(h)=Ee^{hX}$ монотонно растет по h (т.к. растет подынтегральная функция). Но тогда $\Lambda(0)=-\lim_{h\to-\infty}\ln R(h)=-\ln P(X=0)$. Действительно, e^{hX} непрерывна и ограничена при $h<0$, e^{hX} стремится к $I_{X=0}$ при $h\to\infty$, откуда $Ee^{hX}\to EI_{X=0}$. Но тогда утверждение теоремы очевидно, поскольку

$$\frac{P(\ln P(S_n\in(-\delta,\delta)))}{n}\ge\frac{1}{n}\ln P^n(X_1=0)=-\Lambda(0).$$

Теорема доказана.