Спецкурс "Большие уклонения"

Шкляев А.В.

4 октября 2016 г.

Принцип больших уклонений

Итак, мы остановились на доказательстве Теоремы Петрова

$$P(S_n \geq \theta n) = (1 + o(1))C(\theta)n^{-1/2} \exp(-\Lambda(\theta)n),\ n \to \infty.$$

Для доказательства воспользуемся формулой (1) с прошлой лекции:

$$P(S_n \geq \theta n) = e^{-\Lambda(\theta)n} E\left(e^{-h_\theta\left(S_n^{(h_\theta)} - \theta n\right)}; S_n^{(h_\theta)} \geq \theta n\right),$$

асимптотическим разложением

$$F_{\frac{S_n^{(h_\theta)} - \theta n}{\sqrt{n}\sigma(h_\theta)}}(x) = \Phi(x) + \frac{Q(x) + o(1)}{\sqrt{n}},\ n \to \infty,$$

где $Q(x) = c_1(1 - x^2)e^{-x^2/2}$, $c_1 = \mu_3^{(h_\theta)}(6\sqrt{2\pi}\sigma(h_\theta)^3)^{-1}$, а $o(1)$ равномерно ограничено по любому отрезку $x \in [-t\sqrt{n}, t\sqrt{n}]$ и соотношением

$$\int_{[a,b]} f_n(x)dF_n(x) = \int_{[a,b]} f_n(x)dG_n(x) + o(a_n)(|f_n(a)| + |f_n(b)| + \int_a^b |f_n'(x)|dx),$$

справедливым для гладких $f_n(x)$ при равномерно по $[a, b]$ выполненном соотношении $F_n(x) = G_n(x) + o(a_n)$, $n \to \infty$, где $F_n(x)$, $G_n(x)$ — функции ограниченной вариации.

Отметим, что хотя X_i могут не удовлетворять условиям теоремы об асимптотическом разложении (у них может не быть третьего момента), величины $X^{(h)}$ при любом $h \in (0, h^+)$ будут иметь моменты всех порядков. Действительно

$$E|X^{(h)}|^a = \int_{\mathbb{R}} |x|^a P(X^{(h)} \in dx) = R(h)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |x|^a e^{hx} P(X \in dx)$$

Этот интеграл сходится в $-\infty$, поскольку $e^{hx}|x|^a$ экспоненциально убывает и в $+\infty$, поскольку $|x^a|e^{hx} = |x^a|e^{-\delta x}e^{(h+\delta)x}$, а $\int_{\mathbb{R}} e^{(h+\delta)x}P(X \in dx) = R(h + \delta) < \infty$ при достаточно малом δ. Заметим, что

$$E\left(e^{-h_\theta\left(S_n^{(h_\theta)} - \theta n\right)}; S_n^{(h_\theta)} \geq \theta n\right) = \int_0^t e^{-\sqrt{n}\sigma(h_\theta)h_\theta x} dF_{\frac{S_n^{(h_\theta)} - \theta n}{\sqrt{n}\sigma(h_\theta)}}(x) + o(n^{-1/2}),$$

при любом $t > 0$, поскольку $e^{-h_\theta t\sqrt{n}} = o(n^{-1/2})$. Применяя к первому множителю асимптотическое разложение и лемму, имеем для него выражение

$$\int_0^t e^{-\sqrt{n}\sigma(h_\theta)h_\theta x} d\Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^t e^{-\sqrt{n}\sigma(h_\theta)h_\theta x} dQ(x) + o(n^{-1/2}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что f_n' отрицательна, поэтому $\int_a^b |f_n'(x)|dx = f_n(a) - f_n(b) = O(1)$.

Второе слагаемое при этом оценивается сверху величиной

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n^{-1/4}} e^{-\sqrt{n}\sigma(h_\theta)} dQ(x) + e^{-h_\theta n^{1/4}\sigma(h_\theta x} \int_0^t dQ(x) = o(n^{-1/2}),$$

поскольку $\int_0^{n^{-1/4}} e^{-\sqrt{n}\sigma(h_\theta)} dQ(x) = o(1)$ как интеграл по отрезку, чья длина стремится к 0, а $e^{-h_\theta n^{1/4}\sigma(h_\theta x} = o(n^{-1/2})$.

Остается подсчитать

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\sqrt{n}\sigma(h_\theta)h_\theta x} e^{-x^2/2} dx$$

Заметим, что аналогично предыдущим оценкам, достаточно рассматривать только $0 \leq x \leq n^{1/4}$. Но тогда $e^{-x^2/2} \to 1$ и

$$I = o(n^{-1/2}) + (1 + o(1)) \int_0^{n^{1/4}} e^{-\sqrt{n}\sigma(h_\theta)h_\theta x} dx = o(n^{-1/2}) + \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi}\sigma(h_\theta h_\theta}.$$

Равномерность полученной асимптотики следует из равномерности наших оценок, которая следует из того, что $\inf_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} h_\theta > 0$, $\sup_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} h_\theta < \infty$ и того, что все использованные θ асимптотические разложения выполнены равномерно по θ (этот факт вытекает непосредственно из доказательства асимптотического разложения).

Теорема доказана.

Итак, мы получили более грубое, логарифмическое, соотношение

$$\frac{\ln \mathbf{P}(S_n \geq \theta n)}{n} \to -\Lambda(\theta)$$

и более точное соотношение

$$\frac{\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)}{n^{-1/2}e^{-\Lambda(\theta)n}} \to C(\theta).$$

В первом семестре курса мы будем работать с утверждениями первого типа, так называемой грубой асимптотикой. Оказывается, что такого рода утверждения можно выводить в довольно широком классе моделей.

Назовем функцию $f(x)$ полунепрерывной снизу (сверху) в точке, если

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0), \ (\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)).$$

Соответственно, полунепрерывность на множестве есть полунепрерывность в каждой точке множества. Это условие равносильно тому, что $f^{-1}(-\infty, a]$ — замкнутое множество при любом a.
Примером непрерывной сверху функции является $[x]$, непрерывной снизу $\{x\}$.
Назовем функцией роста $\Lambda(x)$ неотрицательную полунепрерывную снизу функцию.

Будем говорить, что последовательность мер P_n удовлетворяет ПБУ (принципу больших уклонений) с функцией роста Λ, если

$$-\inf_{x \in A_{int}} \Lambda(x) \leq \liminf \frac{\ln P_n(A)}{n} \leq \limsup \frac{\ln P_n(A)}{n} \leq -\inf_{x \in \dot{A}} \Lambda(x).$$

Что же это означает? Фактически, мы получаем оценки

$$\exp(-(1+\delta) \inf_{x \in \Gamma_{int}} \Lambda(x) n) \leq P_n(\Gamma) \leq \exp(-(1-\delta) \inf_{x \in \overline{\Gamma}} \Lambda(x) n)$$

при любом наперед взятом δ и достаочно больших n.

Нетрудно заметить, что справедливо следующая эквивалентная формулировка 1) Для любого замкнутого F

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln P_n(F) \leq -\inf_{x \in F} \Lambda(x).$$

2) Для любого открытого G

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln P_n(G) \geq -\inf_{x \in G} \Lambda(x).$$

Действительно, тогда ПБУ будет следовать из этих утверждения для A_{int} и $\dot{A}$.

С одной стороны, ПБУ похож на утверждения наподобие теоремы Крамера, доказанной нами на первой лекции. С другой стороны, здесь речь идет о вероятностях попадания в произвольные множества. Давайте рассмотрим величину X и рассмотрим функцию $\Lambda(\theta) = \sup_h (h\theta - \ln R(h))$, $R(h) = Ee^{hX}$
Давайте посмотрим на нее на некоторых примерах.
Пример 3.1. Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Тогда $R(h) = e^{h^2/2}$,

$$\Lambda(\theta) = \sup(h\theta - \ln R(h)).$$

Функция $h\theta - \ln R(h)$ дифференцируема на всей прямой, при этом $(h\theta - \ln R(h))' = \theta - h$. Значит, $\Lambda(\theta) = \theta^2/2$, как и в теореме Петрова, но уже на всей прямой, включая 0.
Пример 3.2. Пусть $X_i \sim Cauchy$. Тогда $R(h) = \infty$ при $h \neq 0$, $R(h) = 1$ при $h = 0$. Значит $\Lambda(\theta) = 0$.
Пример 3.3. Пусть $X_i \sim exp(\lambda)$, $f_{X_1}(x) = e^{-\lambda x} \lambda I_{x>0}$.
$R(h) = \frac{\lambda}{\lambda - h}$ при $h < \lambda$ и ∞ при $h \geq \lambda$ (см. домашнюю задачу с прошлой лекции). Тогда

$$\Lambda(\theta) = \sup_{h<\lambda} (h\theta - \ln R(h)).$$

Получаем, что т.к. $\theta - (\ln R(h))' = \theta - 1/(\lambda - h)$, то при $\theta > 0$ $\Lambda(\theta) = \theta\lambda - 1 - \ln \lambda\theta$, а при $\theta \leq 0$ $\Lambda(\theta) = \infty$.
Давайте изучим функцию Λ:
Лемма 3.1. 1) $\ln R$ выпукла, Λ выпуклая функция роста.
2) Если $D_R = \emptyset$, то $\Lambda(\theta) = 0$. Если $R(\tilde{h}) < \infty$ при некотором $\tilde{h} > 0$, то существует $\mu = EX$ (возможно минус бесконечное)и $\Lambda(\theta)$ при $\theta > \mu$ неубывает. Аналогично при $R(\tilde{h}) > -\infty$ при некотором $\tilde{h} < 0$, то существует $\mu = EX$ (возможно бесконечное) и $\Lambda(\theta)$ при $\theta < \mu$ невозрастает. При этом $\Lambda(\mu) = 0$.
3) Во внутренних точках D_R $R(\cdot)$ дифференцируема и $R'(h) = EX_1 e^{hX_1}$, $\Lambda'(\theta) = y$, где $\Lambda(\theta) = y\theta - \ln R(y)$.
Доказательство.
1) Надо доказать, что $\ln R(h_1 t_1 + h_2 t_2) \leq \ln R(h_1) t_1 + \ln R(h_2) t_2$ при любых положительных $t_1 + t_2 = 1$.
Но

$$R(h_1 t_1 + h_2 t_2) = E\left(e^{h_1 X_1}\right)^{t_1} \left(e^{h_2 X_1}\right)^{t_2} \leq \left(Ee^{h_1 X_1}\right)^{t_1} \left(Ee^{h_1 X_1}\right)^{t_2}$$

в силу неравенства Гельдера. Аналогичное утверждение для $\Lambda(\theta)$ следует из неравенства

$$\sup_h (h\theta_1 t_1 + h\theta_2 t_2 - \ln R(h\theta_1 t_1) - \ln R(h\theta_2 t_2)) \leq t_1 \sup_h h\theta_1 - \ln R(h\theta_1) + t_2 \sup_h h\theta_2 - \ln R(h\theta_2).$$

То, что Λ функция роста прямо следует из определения. Действительно,

$$\Lambda(\theta_0) = \sup_h (h\theta_0 - \ln R(h)) \leq h_1\theta_0 - \ln R(h_1) + \varepsilon = \liminf_{\theta \to \theta_0} (h_1\theta - \ln R(h_1)) + \varepsilon$$

при любом ε и некотором $h_1(\varepsilon)$. Последний предел очевидно не превосходит $\liminf_{\theta\to\theta_0}\Lambda(\theta)$, откуда вытекает непрерывность снизу.
Неотрицательность Λ следует из того, что $h\theta - \ln R(h) \geq 0\theta - \ln R(0) = 0$.
2) В силу неравенства Иенсена $\ln R(h) \leq hEX_1$, откуда вытекает существование EX и $\Lambda(\mu)=0$. Докажем монотонность. Рассмотрим $\theta h - \ln R(h)$. При $\theta > \mu$ и $h < 0$ $h\theta - \ln R(h) \leq h\mu - \ln R(h) \leq 0$, т.е. супремум достигается на положительных h. Но тогда при $\theta_2 > \theta_1 > \mu$

$$\Lambda(\theta_2) = \sup_{h>0}(h\theta_2 - \ln R(h)) > \sup_{h>0}(h\theta_1 - \ln R(h)) = \Lambda(\theta_1).$$

Значит Λ монтонно возрастает по θ. Аналогично при $\theta < \mu$.