Спецкурс "Большие уклонения"

Шкляев А.В.

19 сентября 2016 г.

Задача о больших уклонениях для случайного блуждания.

Задача о больших уклонениях связана с нетипично большими значениями, которые принимает изучаемая случайная последовательность или случайный процесс. Зачастую для нас имеет большое значение такое событие, даже несмотря на то, что оно имеет маленькую вероятность. Так, например, вероятность наводнения, при котором уровень воды превысит высоту плотины, или вероятность кризиса, при котором курс валюты превысит некоторый большой предел, для нас играет большую роль, простого знания того, что это бывает редко, для нас недостаточно.

Давайте попробуем рассмотреть нашу задачу на случайном блуждании. Пусть X_i — н.о.р. с $EX_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2$, $S_n = X_1 + ... + X_n$. Мы знаем, что

$$P(S_n \geq \mu n + x_n) \sim \Phi\left(\frac{x_n}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

$n \to \infty$ при $x_n = O(\sqrt{n})$ в силу центральной предельной теоремы. А будет ли выполняться то же соотношение при x_n большего порядка, скажем, при $x_n = O(n)$.

Это важно, потому что, например, рассматривая вероятность того, что симметричная монета выпала на орла 5500 раз из 10000, мы утверждаем, что

$$P(S_n \geq 5600) = P\left(\frac{S_n - 5000}{\sqrt{10000 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} \geq \frac{5500 - 5000}{\sqrt{10000 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\right) \approx \Phi\left(10\right).$$

Мы пользуемся при этом нормальной аппроксимацией, поскольку 10000 велико. Но не слишком ли велико отклонение, равное 500? Можно ли считать, что оно порядка $\sigma\sqrt{n}$, равного 50?

Пример 1.1. Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Тогда при любых x_n

$$P(S_n \geq \mu n + x_n) = \Phi\left(\frac{x_n}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Задача 1.1. Показать, что при $x \to \infty$

$$\Phi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2},\ x \to \infty.$$

Тогда

$$P(S_n \geq \mu n + x_n) = \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x_n} e^{-\frac{x_n^2}{2\sigma^2 n}}.$$

При $x_n = \delta n$ имеем

$$P(S_n \geq \mu n + x_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi n}\delta} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}n}.$$

Пример 1.2. Пусть $X_i \sim Poiss(\lambda)$, $\mu = \lambda$. Тогда

$$P(S_n \geq \lambda n + \delta n) = e^{-\lambda n} \sum_{k=\lambda n + \delta n}^{\infty} \frac{(\lambda n)^k}{k!}.$$

Фиксируем t и разобьем сумму на $k > \lambda n + \delta n + t$ и $k < \lambda n + \delta n + t$. Тогда по формуле Стирлинга

$$\frac{(\lambda n)^k}{k!} = \frac{(\lambda n)^k}{\sqrt{2\pi k}k^k e^{-k}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sqrt{(\lambda + \delta)}} (\frac{e\lambda n}{k})^k.$$

При этом

$$\frac{\lambda n}{k} = \frac{\lambda}{\lambda + \delta}\left(1 - \frac{k - (\lambda + \delta)n}{k}\right),$$

откуда

$$\left(\frac{e\lambda n}{k}\right)^k \sim \left(\frac{e\lambda}{\lambda + \delta}\right)^k e^{-(k - (\lambda + \delta)n)}.$$

Следовательно,

$$e^{-\lambda n} \sum_{k=\lambda n + \delta n}^{\lambda n + \delta n + t} \frac{(\lambda n)^k}{k!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sqrt{(\lambda + \delta)}} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta}\right)^{(\lambda + \delta)n} e^{\delta n} \sum_{k=0}^{t} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta}\right)^k.$$

Следовательно, первая сумма при любом t эквивалентна

$$p_n(\delta) \sum_{k=0}^{t} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta}\right)^k,\ p_n(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sqrt{(\lambda + \delta)}} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta}\right)^{(\lambda + \delta)n} e^{\delta n}$$

при $n \to \infty$. Отсюда, в частности,

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{P(S_n \geq \theta n + \delta n)}{p_n(\delta)} \geq \sum_{k=0}^{t} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta}\right)^k$$

при любом t. Для оценки второй части суммы заметим, что

$$\frac{(\lambda n)^{k+1}/(k+1)!}{(\lambda n)^k/k!} = \frac{\lambda n}{k+1} < \frac{\lambda}{\lambda+\delta}.$$

Отсюда

$$\sum_{k>\lambda n+\delta n+t}^{n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} \leq \frac{(\lambda n)^k}{k!}\bigg|_{k=\lambda n+\delta n+t} \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\right)^i \sim \frac{\lambda+\delta}{\delta}\left(\frac{e\lambda}{\lambda+\delta}\right)^{(\lambda+\delta)n+t} e^{-t}.$$

Следовательно, вторая сумма не превосходит $\varepsilon p_n(\delta)$ при достаточно большом t. Таким образом

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{P(S_n \geq \lambda n+\delta n)}{p_n(\delta)} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\right)^k + \varepsilon$$

В силу произвольности t и ε имеем

$$P(S_n \geq \lambda n+\delta n) \sim \frac{\delta}{\delta+\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sqrt{(\lambda+\delta)}}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\right)^{(\lambda+\delta)n} e^{\delta n}.$$

При этом ЦПТ (будь она верна в этом случае) дала бы другой ответ

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi n}\delta}e^{-\frac{\delta^2}{2\lambda}n}$$

Пример 1.3. Пусть X_i принимают значения ± 1 с вероятностями p, $1-p$, $\theta > 2p-1$. Пусть N_n — число 1 среди $X_1, ..., X_n$. Тогда $\{S_n \geq \theta n\} = \{N_n > (1+\theta)n/2\}$, откуда

$$P(S_n \geq \theta n) = \sum_{k=(1+\theta)n/2}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

С помощью формулы Стирлинга можно оценить слагаемые этой суммы, откуда можно вывести, что

$$P(S_n \geq \theta n) \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi(1+\theta)(1-\theta)}} \exp\left(-\left(\theta\ln\left(\frac{\theta}{p}\right) + (1-\theta)\ln\left(\frac{1-\theta}{1-p}\right)\right)n\right).$$

Отметим, что во всех примерах ответ имеет похожий вид

$$P(S_n \geq \theta n)\frac{C(\theta)}{\sqrt{n}}\exp(-\Lambda(\theta)n)$$

при каких-то функциях C, Λ. Возможно это некоторая общая закономерность для всех распределений?
Пример 1.4. Пусть $P(X_i > x) \sim 1/x^{\alpha}$, $\alpha > 2$, $x \to \infty$. Тогда

$$P(S_n \geq \theta n) \geq P(X_1 > \theta n) \sim (\theta n)^{-\alpha}.$$

Как мы видим в этом случае, эта вероятность вовсе не обязана быть экспоненциальной.
Задача 1.2. Доказать, что в действительности справедлива более точная оценка

$$\limsup_{n\to\infty} n^{\alpha-1}P(S_n \geq \theta n) < \frac{1}{2\theta^{\alpha}}.$$

В этом плане распределения разбиваются на два больших случая:
1) Тяжелые хвосты, $P(X > x)$ имеет менее чем экспоненциальный порядок при $x \to \infty$. Тогда вероятность $P(S_n \geq \theta n)$ также не будет экспонециально малой.
2) Легкие хвосты, $P(X > x)$ экспонециально или быстрее убывает на бесконечности. Тогда вероятность $P(S_n \geq \theta n)$ будет экспоненциально малой.

Мы будем рассматривать второй случай. Пусть $R(h) = Ee^{hX} < \infty$ при $0 < h < h^+$. Это условие будем называть правосторонним условием Крамера. В этом случае уже нетрудно показать, что $P(S_n \geq \theta n)$ будет не более чем экспоненциально по n. Действительно, в силу неравенства Маркова

$$P(S_n \geq \theta n) = P(\exp(hS_n) \geq \exp(h\theta n)) \leq e^{-h\theta n}Ee^{hS_n} = \exp((h\theta - \ln R(h))n).$$

Наилучшая оценка будет при этом достигать при таком h, что $(\ln R(h))' = \theta$. Давайте положим $m(h) = (\ln R(h))' = EXe^{hX}/R(h)$, $\sigma^2(h) = m'(h)$

Положим

$$F^{(h)}(x) = P(X^{(h)} \leq x) = R(h)^{-1}\int_{-\infty}^{x} e^{hu}P(X \in du)$$

Такое распределение (а это вероятностное распределение в силу определения $R(h)$) мы назовем сопряженным. Тогда

$$EX^{(h)} = R(h)^{-1}\int_{-\infty}^{x} ue^{hu}P(X\in du) = \frac{R'(h)}{R(h)} = m(h),\ DX^{(h)} = R(h)^{-1}\int_{-\infty}^{x} u^2e^{hu}P(X\in du) - \left(\frac{R'(h)}{R(h)}\right)^2 = \sigma^2(h).$$

Отсюда $\sigma^2(h)$ положительно (и мы действительно имели права назвать эту величину $\sigma^2(h)$), $m(h)$ монотонно возрастает на $(0,h^+)$, $m(0)=\mu=EX$, $m^+ := \lim_{h\to h^+} m(h)$. Таким образом, при всех $\theta\in(\mu,m^+)$ найдется единственное h_θ, т.ч. $m(h_\theta)=\theta$. И наконец положим $\Lambda(\theta) := h_\theta\theta - \ln R(h_\theta)$. Тогда наше неравенство Маркова даст

$$P(S_n\geq\theta n)\leq\exp(-\Lambda(\theta)n)$$

при всех $\theta\in(\mu,m^+)$ Этот факт называется неравенством Чернова. Как выясняется, это довольно точная оценка.
Сегодня мы с вами докажем теорему Крамера.
Теорема 1.1. (Крамер). Пусть X_i — н.о.р., $EX_i=\mu$, $R(h)=Ee^{hX}<\infty$, $0<h<h^+$ при некотором h^+. Тогда при всех $\theta\in(\mu,m^+)$ выполнено соотношение

$$\frac{\ln P(S_n\geq\theta n)}{n}\to-\Lambda(\theta),\ n\to\infty.$$

Доказательство Теоремы 1.1. Верхнюю оценку

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln P(S_n\geq\theta n)}{n}\leq-\Lambda(\theta)$$

имеем из неравенства Чернова. Нижнюю границу

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\ln P(S_n\geq\theta n)}{n}\geq-\Lambda(\theta)$$

получить сложнее и этим мы займемся на следующей лекции.