Лекция 1

Понятие случайного процесса и его распределение

Настоящий курс является продолжением общего курса по теории случайных процессов, в котором было рассмотрено значительное число различных классов случайных процессов. Особенностью настоящего курса является изложение общей теории случайных процессов.

Напомним, что в теории вероятностей основным является понятие *вероятностного пространства* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, включающее в себя:

Ω – пространство элементарных исходов (произвольное множество, элементы которого называются элементарными исходами и обозначаются ω);

$\mathcal{F}$ – это σ-алгебра случайных событий (класс подмножеств Ω, замкнутый относительно взятия дополнения, счетных объединений или пересечений и содержащий Ω);

$\mathbf{P}$ – вероятностная мера на $\mathcal{F}$ (неотрицательная σ-аддитивная функция на $\mathcal{F}$, причем $\mathbf{P}(\Omega) = 1$).

Напомним также, что пара $(E, \mathcal{E})$, где E – произвольное множество, а $\mathcal{E}$ – заданная на нем σ-алгебра, называется *измеримым пространством.* Следовательно, $(\Omega, \mathcal{F})$ является измеримым пространством.

Важным примером измеримых пространств является множество действительных чисел $\mathbb{R}$ со *стандартной метрикой* ρ ($\rho(x, y) = |x - y|$ при $x, y \in \mathbb{R}$) и заданная на нем борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества числовой прямой относительно метрики ρ).

Аналогично на пространстве $\mathbb{R}^n$ действительных числовых векторов размерности $n \in \mathbb{N}$ можно задать борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (минимальную σ-алгебру, содержащую все открытые множества относительно стандартной метрики) и тем самым получить измеримое пространство $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Лемма 1. *Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с минимальной σ-алгеброй, заданной на $\mathbb{R}^n$ и содержащей все множества вида $A_1 \times \ldots \times A_n$, где $A_1, \ldots, A_n$ – произвольные одномерные борелевские множества (здесь $A_1 \times \ldots \times A_n$ означает декартово произведение множеств $A_1, \ldots, A_n$).*

Упомянутые множества вида $A_1 \times \ldots \times A_n$ называются *прямоугольниками.* Важно отметить, что конечные объединения попарно непересекающихся прямоугольников образуют алгебру.

Основными объектами изучения теории вероятностей являются случайные величины и векторы. Под *случайной величиной* $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, понимается произвольное отображение Ω в $\mathbb{R}$, являющееся измеримым относительно σ-алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Это означает, что для любого множества A, принадлежащего σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, его прообраз $\xi^{-1}(A)$ относительно отображения ξ является случайным событием, т.е. принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}$.

Под *случайным вектором* $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$, $\omega \in \Omega$, понимается произвольное отображение Ω в $\mathbb{R}^n$, являющееся измеримым относительно σ-алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1. Пусть заданы измеримые пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$. *Случайным элементом* X называется произвольное отображение Ω в E, измеримое относительно σ-алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ (это означает, что для каждого множества $A \in \mathcal{E}$ множество $X^{-1}(A)$ принадлежит $\mathcal{F}$). При этом говорят, что X – случайный элемент, отображающий $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(E, \mathcal{E})$.

Таким образом, и случайная величина, и случайный вектор являются случайными элементами. Для проверки измеримости отображения полезен следующий простой факт.

Лемма 2. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ – измеримые пространства. Пусть $\widetilde{\mathcal{E}}$ – класс подмножеств множества E, причем $\mathcal{E} = \sigma\left(\widetilde{\mathcal{E}}\right)$ (здесь $\sigma\left(\widetilde{\mathcal{E}}\right)$ – минимальная σ-алгебра, заданная на E и содержащая элементы $\widetilde{\mathcal{E}}$). Для измеримости отображения $X : \Omega \to E$ относительно σ-алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ достаточно, чтобы для каждого множества $A \in \widetilde{\mathcal{E}}$ множество $X^{-1}(A)$ принадлежало $\mathcal{F}$.*

Из лемм 1 и 2 вытекает, что отображение $(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$, $\omega \in \Omega$, пространства Ω в $\mathbb{R}^n$ является случайным вектором на $(\Omega, \mathcal{F})$, если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F})$. Действительно, достаточно показать, что множество $\{\omega \in \Omega : (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)) \in A_1 \times \ldots \times A_n\}$, где $A_1, \ldots, A_n$ – произвольные одномерные борелевские множества, является случайным событием. Но указанное множество совпадает с пересечением случайных событий $\{\omega \in \Omega : \xi_i(\omega) \in A_i\}$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, и, следовательно, само является случайным событием.

Обозначим $\mathbb{R}^\infty$ множество бесконечных числовых последовательностей $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Зададим σ-алгебру на $\mathbb{R}^\infty$. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и еще m натуральных чисел $n_1, \ldots, n_m$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_m)$, а также множество $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Назовем *цилиндрическим множеством* пространства $\mathbb{R}^\infty$ множество таких последовательностей $x \in \mathbb{R}^\infty$, что $(x_{n_1}, \ldots, x_{n_m}) \in A$. Обозначим его $C_{n_1,\ldots,n_m}(A)$. Минимальную σ-алгебру, заданную на $\mathbb{R}^\infty$ и содержащую цилиндрические множества $C_{n_1,\ldots,n_m}(A)$ при всевозможных m, $n_1, \ldots, n_m$ и A, назовем *цилиндрической σ-алгеброй* и обозначим $\mathcal{G}$.

Определение 2. *Случайной последовательностью* называется случайный элемент, отображающий $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{G})$.

Таким образом, каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ сопоставляется бесконечная числовая последовательность. Обозначим ее $\{\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots\}$. Обычно символ ω опускается и для случайной последовательности используются следующие обозначения: $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, или $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, или $\{\xi_n\}$.

Покажем, что если $\left(\xi_{n_1}, \ldots, \xi_{n_m}\right)$ является случайным вектором на $(\Omega, \mathcal{F})$ для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и произвольных натуральных $n_1, \ldots, n_m$, то $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – случайная последовательность на $(\Omega, \mathcal{F})$. Действительно, для произвольного $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

$$\{\omega \in \Omega : \{\xi_1, \xi_2, \ldots\} \in C_{n_1,\ldots,n_m}(A)\} = \left\{\omega \in \Omega : \left(\xi_{n_1}, \ldots, \xi_{n_m}\right) \in A\right\},$$

а последнее множество является случайным событием. Откуда по лемме 2 получаем требуемое утверждение. В свою очередь, $\left(\xi_{n_1}, \ldots, \xi_{n_m}\right)$ является случайным вектором на $(\Omega, \mathcal{F})$ для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и произвольных $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$, если ξ_n является случайной величиной на $(\Omega, \mathcal{F})$ для произвольного $n \in \mathbb{N}$. В итоге приходим к эквивалентному определению.

Определение 2$'$. *Случайной последовательностью* называется последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, заданных на одном вероятностном пространстве.

Обозначим $R\,[0, +\infty)$ множество всех числовых функций $x = x\,(t)$, $t \in [0, +\infty)$. Зададим σ-алгебру на $R\,[0, +\infty)$. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, действительные числа $t_1, \ldots, t_m$ ($0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m$) и множество $A \in \mathcal{B}\,(\mathbb{R}^m)$. Назовем *цилиндрическим множеством* пространства $R\,[0, +\infty)$ множество таких функций $x \in R\,[0, +\infty)$, что $(x\,(t_1)\,, \ldots, x\,(t_m)) \in A$. Обозначим его $C_{t_1,\ldots,t_m}\,(A)$. Минимальную σ-алгебру, заданную на $R\,[0, +\infty)$ и содержащую цилиндрические множества $C_{t_1,\ldots,t_m}\,(A)$ при всевозможных $m, t_1, \ldots, t_m$ и A, назовем *цилиндрической σ-алгеброй* и обозначим $\mathcal{G}$.

Определение 3. *Случайным процессом* называется случайный элемент, отображающий $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(R\,[0, +\infty)\,, \mathcal{G})$.

Таким образом, каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ сопоставляется числовая функция, заданная на полуоси $[0, +\infty)$. Обозначим ее $X\,(t, \omega)$, $t \in [0, +\infty)$. Переменная t трактуется как время. Обычно символ ω опускается и для случайного процесса используются следующие обозначения: $\{X\,(t)\,,\ t \geq 0\}$, или $\{X\,(t)\}$, или X.

Функция $X\,(t, \omega)$, $t \in [0, +\infty)$ (при фиксированном ω), называется *траекторией* случайного процесса X, соответствующей элементарному исходу ω. Если же фиксируется переменная t, то отображение $X\,(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, называется *сечением* случайного процесса X, соответствующим моменту времени t.

Покажем, что если $(X\,(t_1)\,, \ldots, X\,(t_m))$ является случайным вектором на $(\Omega, \mathcal{F})$ для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и произвольных $t_1, \ldots, t_m \in [0, +\infty)$, то $\{X\,(t)\,,\ t \geq 0\}$ – случайный процесс на $(\Omega, \mathcal{F})$. Действительно, для произвольного $A \in \mathcal{B}\,(\mathbb{R}^m)$

$$\{\omega \in \Omega : \{X\,(t)\,,\ t \geq 0\} \in C_{t_1,\ldots,t_m}\,(A)\} = \{\omega \in \Omega : (X\,(t_1)\,, \ldots, X\,(t_m)) \in A\}\,,$$

а последнее множество является случайным событием. Откуда по лемме 2 получаем требуемое утверждение. В свою очередь, $(X\,(t_1)\,, \ldots, X\,(t_m))$ является случайным вектором на $(\Omega, \mathcal{F})$ для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и произвольных $t_1, \ldots, t_m \in [0, +\infty)$, если $X\,(t)$ является случайной величиной на $(\Omega, \mathcal{F})$ для произвольного $t \in [0, +\infty)$. Таким образом, приходим к эквивалентному определению.

Определение 3$'$. *Случайным процессом* называется совокупность случайных величин $X\,(t)\,, t \in [0, +\infty)$, заданных на одном вероятностном пространстве.

При исследовании случайных величин и векторов основным инструментом являются их распределения. Напомним, что распределением случайной величины ξ, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется вероятностная мера $\mathbf{P}^{(\xi)}$, заданная на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B}\,(\mathbb{R}))$ по правилу: $\mathbf{P}^{(\xi)}\,(A) = \mathbf{P}\,(\xi \in A)$, $A \in \mathcal{B}\,(\mathbb{R})$ (событие $\{\xi \in A\}$ есть краткая запись события $\{\omega \in \Omega : \xi\,(\omega) \in A\}$). Аналогично определяется распределение случайного вектора.

Определение 4. Пусть X – случайный элемент, отображающий вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в измеримое пространство $(E, \mathcal{E})$. Этот элемент *индуцирует* на пространстве $(E, \mathcal{E})$ вероятностную меру $\mathbf{P}^{(X)}$ по формуле

$$\mathbf{P}^{(X)}(A) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) = \mathbf{P}(X \in A), \quad A \in \mathcal{E}.$$

Меру $\mathbf{P}^{(X)}$ называют *распределением случайного элемента* X на пространстве $(E, \mathcal{E})$.

Вспоминая, что случайный процесс – случайный элемент со значениями в $(R[0, +\infty), \mathcal{G})$, приходим к следующему определению.

Определение 5. *Распределением* случайного процесса X называется вероятностная мера $\mathbf{P}^{(X)}$, индуцированная процессом X на пространстве $(R[0, +\infty), \mathcal{G})$:

$$\mathbf{P}^{(X)}(A) = \mathbf{P}(X \in A), \quad A \in \mathcal{G}.$$

В духе теории вероятностей вместо случайных величин или векторов задавать их распределения. Отметим общий факт, касающийся случайных элементов: если на измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$ задана вероятностная мера P, то существует вероятностное пространство и случайный элемент на нем со значениями в $(E, \mathcal{E})$, распределение которого совпадает с P (достаточно рассмотреть вероятностное пространство $(E, \mathcal{E}, P)$ и случайный элемент на нем, совпадающий с тождественным отображением E в E).

Что касается распределений случайных величин или векторов, то они задаются при помощи *функций распределения*. Хорошо известно, что в качестве функции распределения случайной величины можно рассматривать произвольную неубывающую непрерывную справа числовую функцию, заданную на $(-\infty, +\infty)$ и имеющую пределы 0 и 1 на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно.

Для задания распределения случайного процесса используются конечномерные распределения. Напомним, что конечномерным распределением случайного процесса X, отвечающим моментам времени $t_1, \ldots, t_m$ $(0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$, $m \in \mathbb{N}$, называется распределение случайного вектора $(X(t_1), \ldots, X(t_m))$, т.е. следующая вероятностная мера на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$:

$$\mathbf{P}^{(X)}_{t_1,\ldots,t_m}(A) = \mathbf{P}((X(t_1), \ldots, X(t_m)) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

Напомним также важную в теории меры *теорему Каратеодори.*

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, заданная на множестве* Ω, и μ_0 – *неотрицательная конечная σ-аддитивная функция на* $(\Omega, \mathcal{A})$. *Тогда существует единственная мера μ на $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$, являющаяся продолжением μ_0.*

Покажем, что конечномерные распределения случайного процесса однозначно задают его распределение. Действительно, при $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

$$\mathbf{P}^{(X)}_{t_1,\ldots,t_m}(A) = \mathbf{P}(X \in C_{t_1,\ldots,t_m}(A)) = \mathbf{P}^{(X)}(C_{t_1,\ldots,t_m}(A)),$$

где, напомним, $C_{t_1,\ldots,t_m}(A)$ – цилиндрическое множество. Таким образом, *конечномерное распределение* случайного процесса X, отвечающее моментам времени $t_1, \ldots, t_m$, является сужением распределения этого процесса на цилиндрические множества $C_{t_1,\ldots,t_m}(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Легко видеть, что совокупность $\mathcal{G}_0$ всех цилиндрических множеств образует алгебру на множестве $R[0,+\infty)$, а вероятность $\mathbf{P}^{(X)}\left(C_{t_1,\ldots,t_m}(A)\right)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, является неотрицательной конечной σ-аддитивной функцией на $\mathcal{G}_0$. По теореме Каратеодори эту функцию можно единственным образом продолжить на минимальную σ-алгебру, содержащую $\mathcal{G}_0$. А это означает однозначное восстановление вероятности $\mathbf{P}^{(X)}(A)$ для произвольного множества $A \in \mathcal{G}$.

Каким условиям должны удовлетворять вероятностные меры, заданные для каждого $m \in \mathbb{N}$ и для каждого набора моментов времени $t_1, \ldots, t_m$ на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, чтобы существовал случайный процесс, конечномерные распределения которого совпадали бы с этими мерами?

Определение 6. Пусть каждому конечному набору чисел $t_1, \ldots, t_m$ $(0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$, $m \in \mathbb{N}$, соответствует вероятностная мера $\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_m}$ на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Говорят, что эти меры *согласованы,* если для каждой такой меры (при $m \ge 2$) и произвольного $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_m}\left(A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times A_{j+1} \times \ldots \times A_m\right) =$$
$$= \mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_m}\left(A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times \mathbb{R} \times A_{j+1} \times \ldots \times A_m\right) \tag{1}$$

для произвольных $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Заметим, что для конечномерных распределений случайного процесса условие согласованности выполняется:

$$\mathbf{P}^{(X)}_{t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_m}\left(A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times A_{j+1} \times \ldots \times A_m\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(X(t_i) \in A_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(X(t_i) \in A_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}\,;\; X(t_j) \in \mathbb{R}\right) =$$
$$= \mathbf{P}^{(X)}_{t_1,\ldots,t_m}\left(A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times \mathbb{R} \times A_{j+1} \times \ldots \times A_m\right).$$

Оказывается, справедливо и обратное утверждение, получившее название *теоремы Колмогорова о существовании процесса.*

Теорема 2. *Пусть каждому конечному набору чисел* $t_1, \ldots, t_m$ $(0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$, $m \in \mathbb{N}$, *соответствует вероятностная мера* $\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_m}$ *на измеримом пространстве* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. *И пусть эти меры согласованы. Тогда существует вероятностное пространство и заданный на нем случайный процесс, конечномерными распределениями которого являются меры* $\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_m}$.

Для проверки условия согласованности удобно сформулировать его в терминах случайных векторов. Рассмотрим случайный вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, распределение которого совпадает с $\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_m}$ (как мы уже знаем, такой случайный вектор существует). Тогда правая часть соотношения (1) является значением распределения подвектора $\left(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_m\right)$ на множестве $A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times A_{j+1} \times \ldots \times A_m$, а само соотношение (1) говорит о том, что этот подвектор имеет распределение $\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_m}$ (в силу теоремы Каратеодори, леммы 1 и того факта, что конечные объединения попарно непересекающихся прямоугольников образуют алгебру).

В качестве примера установим существование *броуновского движения* (в общем курсе теории случайных процессов это было сделано конструктивно). Напомним определение этого случайного процесса.

Определение 7. *Броуновским движением* называется случайный процесс $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

1) $W(0) = 0$;

2) W является *процессом с независимыми приращениями*, т.е. для каждого набора чисел $t_1, \ldots, t_m$ $(0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$, $m \in \mathbb{N}$, случайные величины $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$ независимы;

3) приращения процесса W распределены нормально: $W(t_2) - W(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1)$ для произвольных чисел t_1, t_2 $(0 \leq t_1 < t_2)$.

Приведем эквивалентное определение броуновского движения (см. общий курс теории случайных процессов).

Определение 7$'$. *Броуновским движением* называется случайный процесс $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

1) $W(0) = 0$;

2) конечномерные распределения являются нормальными;

3) $\mathbf{E}W(t) = 0$ при $t \geq 0$ и $\mathbf{cov}(W(t), W(s)) = \mathbf{E}W(t)W(s) = \min(t, s)$ при $t, s \geq 0$.

Установим существование броуновского движения. Для этого надо проверить условие согласованности. Существует случайный вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, имеющий нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $A = \{a_{k,l}\}$, где $a_{k,l} = \min(t_k, t_l)$, $k, l \in \{1, \ldots, m\}$. Условие согласованности сводится к тому, что для произвольного $j \in \{1, \ldots, m\}$ подвектор $\left(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_m\right)$ имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $\widetilde{A}$ размера $(m-1) \times (m-1)$, элементами которой являются числа $a_{k,l} = \min(t_k, t_l)$ при $k, l \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$. Пусть $\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, – характеристическая функция вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$. Известно, что

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \lambda_k a_{k,l} \lambda_l / 2\right),$$

тогда характеристическая функция указанного подвектора равна

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\Big|_{\lambda_j = 0} = \exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \lambda_k a_{k,l} \lambda_l / 2\right)\Bigg|_{\lambda_j = 0} =$$

$$= \exp\left(-\sum_{k,l \in \{1,\ldots,m\}} \lambda_k a_{k,l} \lambda_l / 2\right)\Bigg|_{\lambda_j = 0} = \exp\left(-\sum_{k,l \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{j\}} \lambda_k a_{k,l} \lambda_l / 2\right),$$

но последнее выражение совпадает с характеристической функцией случайного вектора, имеющего нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $\widetilde{A}$. Итак, существование броуновского движения установлено.