

## Лекция 10

### Условная функциональная предельная теорема Лиггетта

Прежде, чем говорить об основной цели лекции, дадим некоторые общие определения, касающиеся дискретных распределений.

**Определение 1.** Распределение случайной величины  $X$  называется  $(h, a)$ -решетчатым, если оно является дискретным и существуют такие числа  $h > 0$  и  $a \in [0, h)$ , что возможные значения  $X$  принадлежат множеству  $\{a + ht, t \in \mathbb{Z}\}$ . Величина  $a$  называется *сносом распределения*, а величина  $h$  называется *шагом распределения*. Распределения, не являющиеся решетчатыми, называются *нерешетчатыми*.

Отметим, что у одного решетчатого распределения может быть несколько наборов  $(h, a)$ , при этом для каждого возможного  $h$  величина  $a$  находится однозначно.

**Пример 1.** Пусть  $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = 1/2$ , тогда распределение случайной величины  $X$  является  $(2, 1)$ -решетчатым и  $(1, 0)$ -решетчатым.

**Определение 2.** Максимальное из возможных значений  $h$  решетчатого распределения называется *максимальным шагом распределения*.

В примере 1 максимальный шаг распределения равен 2.

**Определение 3.** Если у решетчатого распределения максимальный шаг равен  $h$  и при этом  $a = 0$ , то это распределение называется *центрально решетчатым*.

Пусть  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  – случайное блуждание с шагами  $X_1, X_2, \dots$ , причем  $\mathbf{E}X_1 = 0$ ,  $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2$ ,  $0 < \sigma^2 < +\infty$ . Положим, как и раньше, при  $n \in \mathbb{N}$

$$Y_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in [0, 1].$$

Следующий результат получил название *условной функциональной предельной теоремы Лиггетта*.

**Теорема 1.** Пусть  $X_1, X_2, \dots$  – независимые одинаково распределенные центрально решетчатые или нерешетчатые случайные величины,  $\mathbf{E}X_1 = 0$ ,  $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2$ ,  $0 < \sigma^2 < +\infty$ . Тогда для произвольных фиксированных  $a < 0$  и  $b \geq 0$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid S_n \in (a, b]\} \xrightarrow{D} W_0,$$

где  $W_0$  – броуновский мост, знак  $\xrightarrow{D}$  означает сходимость по распределению в пространстве  $D[0, 1]$ .

*Доказательство теоремы 1* разобьем на ряд лемм. Будем считать, что в решетчатом случае максимальный шаг распределения  $X_1$  равен  $h$  и  $a, b$  кратны  $h$ . Следующий результат известен как теорема Стоуна.

**Лемма 1.** В условиях теоремы 1 для произвольных  $x \in \mathbb{R}$  и  $\Delta > 0$  (в решетчатом случае  $\Delta$  кратно  $h$ ) при  $n \rightarrow \infty$

$$\sigma\sqrt{n}\mathbf{P}(S_n \in (\sigma\sqrt{nx}, \sigma\sqrt{nx} + \Delta]) = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + o(1));$$

это соотношение выполняется равномерно по  $x \in \mathbb{R}$ .

Лемма, по сути, означает, что при больших  $n$  распределение случайной величины  $S_n/(\sigma\sqrt{n})$  мало отличается от стандартного нормального, а именно

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(x, x + \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \approx p(x) \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}},$$

где  $p(x)$  – плотность распределения  $N(0, 1)$ . Отметим, что утверждение леммы сохранится, если промежуток  $(\sigma\sqrt{nx}, \sigma\sqrt{nx} + \Delta]$  заменить на промежуток  $(\sigma\sqrt{nx} - \Delta, \sigma\sqrt{nx}]$ .

**Лемма 2.** В условиях теоремы 1 при  $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(S_n \in (a, b]) \sim \frac{b - a}{\sqrt{2\pi n\sigma}}$$

и, следовательно,  $\mathbf{P}(S_n \in (a, b]) \neq 0$  при достаточно больших  $n$ .

*Доказательство.* В силу леммы 1 для произвольного  $x \in \mathbb{R}$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\sigma\sqrt{n}\mathbf{P}(S_n \in (\sigma\sqrt{nx} + a, \sigma\sqrt{nx} + b]) = \frac{b - a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + o(1)).$$

При  $x = 0$  получаем утверждение леммы.

Пусть верхний индекс у  $\mathbf{P}^{(x)}$  означает, что случайное блуждание  $\{S_n\}$  стартует из точки  $x$ , а не из точки 0.

**Лемма 3.** В условиях теоремы 1 для произвольных  $x \in \mathbb{R}$  и  $t \in (0, 1)$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{nx})}(S_{n-[nt]} \in (a, b]) = \frac{b - a}{\sqrt{2\pi(1-t)n\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}} (1 + o(1)); \quad (1)$$

это соотношение выполняется равномерно по  $x$ , принадлежащим произвольному конечному отрезку. Кроме того, существует такая постоянная  $K > 0$ , что при всех  $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{nx})}(S_{n-[nt]} \in (a, b]) \leq \frac{K}{\sqrt{n}}. \quad (2)$$

*Доказательство.* Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{nx})}(S_{n-[nt]} \in (a, b]) &= \mathbf{P}(S_{n-[nt]} \in (-\sigma\sqrt{nx} + a, -\sigma\sqrt{nx} + b]) = \\ &= \mathbf{P}(S_{n-[nt]} \in (-\sigma\sqrt{n - [nt]}x_n + a, -\sigma\sqrt{n - [nt]}x_n + b)), \end{aligned}$$

где  $x_n = x\sqrt{n/(n - [nt])}$ . Следовательно, в силу леммы 1 при  $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}^{\sigma\sqrt{nx}}(S_{n-[nt]} \in (a, b]) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{n-[nt]}}} e^{-\frac{1}{2}x_n^2} (1 + o(1)) \quad (3)$$

равномерно по  $x \in \mathbb{R}$ . Поскольку правая часть соотношения (3) не превосходит  $K/\sqrt{n}$  при всех  $x \in \mathbb{R}$  (здесь  $K > 0$  – некоторая постоянная), то получаем соотношение (2). Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n(1-t)}} - \frac{1}{\sqrt{n-[nt]}} &= \frac{1}{\sqrt{n(1-t)}} \left(1 - \sqrt{\frac{n(1-t)}{n-[nt]}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n(1-t)}}\right), \\ e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}} - e^{-\frac{1}{2}x_n^2} &= e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}\delta_n(t)}\right), \end{aligned}$$

где  $\delta_n(t) = \frac{n}{n-[nt]} - \frac{1}{1-t}$ . При этом  $x^2|\delta_n(t)| = o(1/n)$  равномерно по  $x$ , принадлежащим произвольному конечному отрезку, поэтому правую часть соотношения (3) можно привести к виду, указанному в правой части соотношения (1). Это означает справедливость соотношения (1). Лемма доказана.

**Лемма 4.** Пусть  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$  – случайные величины, заданные на вероятностных пространствах с мерами  $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots$ , и  $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$  при  $n \rightarrow \infty$ . Пусть  $\{f_n\}$  – последовательность равномерно ограниченных измеримых числовых функций на  $\mathbb{R}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  равномерно по  $x$ , принадлежащим произвольному отрезку, причем  $f(x)$  – непрерывная функция. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_n(f_n(\xi_n); \xi_n \in B) = \mathbf{E}(f(\xi); \xi \in B)$$

для каждого такого борелевского множества  $B \subset \mathbb{R}$ , что  $\mathbf{P}(\xi \in \partial B) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $|f_n(x)| \leq K$  при всех  $x \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$ , тогда для произвольного  $u > 0$

$$\mathbf{E}_n(|f_n(\xi_n)|; |\xi_n| \geq u) \leq K\mathbf{P}_n(|\xi_n| \geq u).$$

Поскольку  $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(|\xi_n| \geq u) \leq \mathbf{P}(|\xi| \geq u)$  и, следовательно,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_n(|f_n(\xi_n)|; |\xi_n| \geq u) = 0.$$

Поэтому ограничимся случаем, когда  $B \in [-u, u]$  при некотором  $u > 0$ . Ясно, что

$$\begin{aligned} &|\mathbf{E}_n(f_n(\xi_n); \xi_n \in B) - \mathbf{E}(f(\xi); \xi \in B)| \leq \\ &\leq \mathbf{E}_n(|f_n(\xi_n) - f(\xi_n)|; \xi_n \in B) + |\mathbf{E}_n(f(\xi_n); \xi_n \in B) - \mathbf{E}(f(\xi); \xi \in B)|. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\mathbf{E}_n(|f_n(\xi_n) - f(\xi_n)|; \xi_n \in B) \leq \sup_{x \in [-u, u]} |f_n(x) - f(x)|$$

и, значит,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_n(|f_n(\xi_n) - f(\xi_n)|; \xi_n \in B) = 0.$$

Далее,  $\mathbf{E}_n(f(\xi_n); \xi_n \in B) = \mathbf{E}_n g(\xi_n)$ , где  $g(x) = f(x)I_B(x)$  при  $x \in \mathbb{R}$  (здесь  $I_B(\cdot)$  – индикатор множества  $B$ ). Функция  $g(\cdot)$  непрерывна на множестве  $\mathbb{R} \setminus \partial B$ , причем по условию леммы  $\mathbf{P}(\xi \in \mathbb{R} \setminus \partial B) = 1$ . По теореме 1' лекции 4  $g(\xi_n) \xrightarrow{D} g(\xi)$  при  $n \rightarrow \infty$  и, следовательно, по теореме о мажорируемой сходимости  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_n g(\xi_n) = \mathbf{E} g(\xi)$ . Это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_n(f(\xi_n); \xi_n \in B) = \mathbf{E}(f(\xi); \xi \in B)$ , поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{E}_n(f(\xi_n); \xi_n \in B) - \mathbf{E}(f(\xi); \xi \in B)| = 0.$$

Лемма доказана.

**Замечание 1.** Пусть  $F_n$  – функция распределения случайной величины  $\xi_n$ , а  $F$  – функция распределения случайной величины  $\xi$ . Тогда утверждение леммы 4 можно записать в следующем виде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x) dF_n(x) = \int_B f(x) dF(x).$$

**Лемма 5.** *Последовательность случайных процессов*

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid S_n \in (a, b)\}$$

*сходится при  $n \rightarrow \infty$  в смысле конечномерных распределений к процессу  $\{W_0(t), t \in [0, 1]\}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $m \in \mathbb{N}$  и  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1$ . Рассмотрим при фиксированных  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Y_n(t_k) \leq a_k, k \in I_m \mid S_n \in (a, b)) = \\ & = \frac{1}{\mathbf{P}(S_n \in (a, b))} \mathbf{P}(Y_n(t_k) \leq a_k, k \in I_m; S_n \in (a, b)). \end{aligned}$$

В силу марковского свойства случайного блуждания правая часть равна

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{a_m} dx \mathbf{P}(Y_n(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1}; Y_n(t_m) \leq x) \frac{\mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{nx})}(S_{n-\lfloor nt_m \rfloor} \in (a, b))}{\mathbf{P}(S_n \in (a, b))} = \\ & = \int_{-\infty}^{a_m} f_n(x) dF_n(x), \end{aligned}$$

где

$$f_n(x) = \mathbf{P}(Y_n(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1}) \frac{\mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{nx})}(S_{n-\lfloor nt_m \rfloor} \in (a, b))}{\mathbf{P}(S_n \in (a, b))},$$

$$F_n(x) = \mathbf{P}(Y_n(t_m) \leq x \mid Y_n(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1}).$$

Итак,

$$\mathbf{P}(Y_n(t_k) \leq a_k, k \in I_m \mid S_n \in (a, b)) = \int_{-\infty}^{a_m} f_n(x) dF_n(x). \quad (4)$$

Воспользуемся леммой 4 (см. также замечание 1). По принципу инвариантности Донскера-Прохорова

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(Y_n(t_m) \leq x, Y_n(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1})}{\mathbf{P}(Y_n(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1})} = \\ &= \frac{\mathbf{P}(W(t_m) \leq x, W(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1})}{\mathbf{P}(W(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1})} = \\ &= \mathbf{P}(W(t_m) \leq x \mid W(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1}).\end{aligned}\quad (5)$$

Ввиду лемм 2 и 3 последовательность функций  $\{f_n\}$  равномерно ограничена на  $\mathbb{R}$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}} \mathbf{P}(W(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1}) \quad (6)$$

равномерно по  $x$ , принадлежащим произвольному отрезку. Из соотношений (4)-(6) по лемме 4 получаем, что

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n(t_k) \leq a_k, k \in I_m \mid S_n \in (a, b]) &= \\ &= \int_{-\infty}^{a_m} \frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}} \mathbf{P}(W(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1}) \times \\ &\quad \times d_x \mathbf{P}(W(t_m) \leq x \mid W(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1}) = \\ &= \int_{-\infty}^{a_m} \frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}} d_x \mathbf{P}(W(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1}; W(t_m) \leq x).\end{aligned}\quad (7)$$

Вспомним, что броуновское движение  $W$  является марковским процессом с переходной плотностью

$$p(s, x; t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}, \quad 0 \leq s < t, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, во-первых,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(W(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1}; W(t_m) \leq x) &= \\ &= \int_{G_{m-1}(a_1, \dots, a_{m-1}) \times (-\infty, x]} \cdots \int \prod_{k=1}^m p(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k) dx_1 \dots dx_m = \int_{-\infty}^x g(x_m) dx_m,\end{aligned}$$

где  $x_0 = 0$  и

$$g(x_m) = \int_{G_{m-1}(a_1, \dots, a_{m-1})} \cdots \int \prod_{k=1}^m p(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k) dx_1 \dots dx_{m-1};$$

и, во-вторых,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}} = \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0, 0; 1, 0)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{a_m} \frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}} dx \mathbf{P}(W(t_k) \leq a_k, k \in I_{m-1}; W(t_m) \leq x) = \\
& = \int_{-\infty}^{a_m} \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0, 0; 1, 0)} g(x) dx = \\
& = \int_{G_{m-1}(a_1, \dots, a_{m-1}) \times (-\infty, a_m]} \prod_{k=1}^m p(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k) \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0, 0; 1, 0)} dx_1 \dots dx_m = \\
& = \int_{G_m(a_1, \dots, a_m)} \prod_{k=1}^m p(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k) \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0, 0; 1, 0)} dx_1 \dots dx_m. \quad (8)
\end{aligned}$$

Известно (см. соотношение (8) лекции 9), что в последнем интеграле подынтегральное выражение совпадает с  $\prod_{k=0}^{m-1} p_0(t_k, x_k; t_{k+1}, x_{k+1})$ , поэтому

$$\begin{aligned}
& \int_{G_m(a_1, \dots, a_m)} \prod_{k=1}^m p(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k) \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0, 0; 1, 0)} dx_1 \dots dx_m = \\
& = \int_{G_m(a_1, \dots, a_m)} \prod_{k=0}^{m-1} p_0(t_k, x_k; t_{k+1}, x_{k+1}) dx_1 \dots dx_m = \\
& = \mathbf{P}(W_0(t_k) \leq a_k, k \in I_m). \quad (9)
\end{aligned}$$

Из соотношений (7)-(9) следует, что

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n(t_k) \leq a_k, k \in I_m \mid S_n \in (a, b]) = \\
& = \mathbf{P}(W_0(t_k) \leq a_k, k \in I_m).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Лемма 6.** Для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon \mid S_n \in (a, b]) = 0.$$

*Доказательство.* Положим для  $x \in D[c, d]$  при  $-\infty < c \leq d < +\infty$

$$w_x(\delta; c, d) = \sup_{\substack{t, s: |t-s| \leq \delta, \\ t, s \in [c, d]}} |x(t) - x(s)|,$$

где  $\delta$  - положительное число. Очевидно, что при достаточно малых  $\delta > 0$

$$w_x(\delta) = w_x(\delta; 0, 1) \leq w_x(\delta; 0, 2/3) + w_x(\delta; 1/2, 1). \quad (10)$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta; 0, 2/3) \geq \varepsilon \mid S_n \in (a, b]) = 0. \quad (11)$$

В силу марковского свойства случайного блуждания

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta; 0, 2/3) \geq \varepsilon \mid S_n \in (a, b]) = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} d_x \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta; 0, 2/3) \geq \varepsilon, Y_n(2/3) \leq x) \frac{\mathbf{P}^{(x\sigma\sqrt{n})}(S_{n-\lfloor 2n/3 \rfloor} \in (a, b])}{\mathbf{P}(S_n \in (a, b])}. \end{aligned} \quad (12)$$

По лемме 3

$$\mathbf{P}^{(x\sigma\sqrt{n})}(S_{n-\lfloor 2n/3 \rfloor} \in (a, b]) \leq \frac{K}{\sqrt{n}} \quad (13)$$

при всех  $x \in \mathbb{R}$ . Из соотношения (13) и леммы 2 следует, что при достаточно больших  $n$  и всех  $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathbf{P}^{(x\sigma\sqrt{n})}(S_{n-\lfloor 2n/3 \rfloor} \in (a, b])}{\mathbf{P}(S_n \in (a, b])} \leq L \quad (14)$$

где  $L > 0$  – постоянная. Применяя (14) к соотношению (12), находим, что

$$\mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta; 0, 2/3) \geq \varepsilon \mid S_n \in (a, b]) \leq L \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta; 0, 2/3) \geq \varepsilon). \quad (15)$$

По принципу инвариантности Донскера-Прохорова

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta; 0, 2/3) \geq \varepsilon) = 0. \quad (16)$$

Из соотношений (15) и (16) следует (11).

Покажем теперь, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta; 1/2, 1) \geq \varepsilon \mid S_n \in (a, b]) = 0. \quad (17)$$

Положим  $\tilde{S}_0 = 0$ ,  $\tilde{S}_1 = S_n - S_{n-1}$ ,  $\tilde{S}_2 = S_n - S_{n-2}$ , ...,  $\tilde{S}_n = S_n - S_0 = S_n$ . Заметим, что

$$(S_1, \dots, S_n) \stackrel{d}{=} (\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n).$$

Условие  $\{S_n \in (a, b)\}$  означает, что  $\{\tilde{S}_n \in (a, b)\}$ . Для каждого  $n \in \mathbb{R}$  введем случайный процесс  $\tilde{Y}_n(t) = \tilde{S}_{\lfloor nt \rfloor} / (\sigma\sqrt{n})$ ,  $t \in [0, 1]$ . В силу (11)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{\tilde{Y}_n}(\delta; 0, 2/3) \geq \varepsilon \mid \tilde{S}_n \in (a, b]) = 0. \quad (18)$$

Если  $(s, t) \in [1/2, 1]$  и  $|t - s| \leq \delta$ , то при достаточно больших  $n$

$$|Y_n(t) - Y_n(s)| = \frac{|S_{\lfloor nt \rfloor} - S_{\lfloor ns \rfloor}|}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{|\tilde{S}_{n-\lfloor ns \rfloor} - \tilde{S}_{n-\lfloor nt \rfloor}|}{\sigma\sqrt{n}} \leq w_{\tilde{Y}_n}(2\delta; 0, 2/3).$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta; 1/2, 1) \geq \varepsilon \mid S_n \in (a, b]) \leq \mathbf{P}(w_{\tilde{Y}_n}(2\delta; 0, 2/3) \geq \varepsilon \mid \tilde{S}_n \in (a, b]).$$

Откуда, ввиду соотношения (18), следует (17).

Из соотношений (10), (11) и (17) вытекает утверждение леммы.

Ввиду лемм 5 и 6 по теореме о  $C$ -сходимости получаем утверждение теоремы 1.