Лекция 8.1

Приложения принципа инвариантности Донскера-Прохорова

Из принципа инвариантности Донскера-Прохорова следует, что если $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, то при $n \to \infty$

$$f(Y_n) \overset{D}{\to} f(W), \tag{1}$$

где f – произвольный функционал, заданный на $D[0,1]$ и непрерывный относительно метрики Скорохода. Более того (см. теорему $1'$ лекции 4), если C_f – множество тех элементов $D[0,1]$, в которых функционал f непрерывен относительно метрики Скорохода, то соотношение (1) выполняется, если

$$\mathbf{P}(W \in C_f) = 1. \tag{2}$$

Замечание 1. Именно соотношение (1) разумно называть *принципом инвариантности*, поскольку правая часть соотношения (1) не зависит от распределения X_1. С современной точки зрения вместо названия "принцип инвариантности" для теоремы 1 лекции 7 лучше использовать название "*функциональная предельная теорема*".

В дальнейшем нас будет интересовать непрерывность тех или иных функционалов f, заданных на пространстве $D[0,1]$ с метрикой Скорохода. При этом полезным окажется следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть функционал $f(x)$, $x \in D[0,1]$, равномерно непрерывен относительно равномерной метрики. Тогда этот функционал непрерывен относительно метрики Скорохода при $x \in C[0,1]$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функционала f относительно равномерной метрики существует такое $\delta_1 > 0$, что из неравенства $\rho_{\text{равн}}(y,z) \le \delta_1$ следует неравенство $|f(y) - f(z)| \le \varepsilon/2$ (здесь $y, z \in D[0,1]$). Зафиксируем $x \in C[0,1]$. По лемме 1 лекции 5 существует такое $\delta_2 > 0$, что $w_x(\delta_2) \le \delta_1$.

Пусть $y \in D[0,1]$ таково, что $\rho_{\text{ск}}(x,y) \le \delta_3$, где $\delta_3 = 2^{-1}\min(\delta_1,\delta_2)$, тогда существует такое строго возрастающее и непрерывное отображение λ отрезка $[0,1]$ на себя, что

$$\sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t| \le 2\delta_3 \le \delta_2, \qquad \sup_{t\in[0,1]} |x(\lambda(t)) - y(t)| \le 2\delta_3 \le \delta_1.$$

Если $\sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t| \le \delta_2$, то

$$\sup_{t\in[0,1]} |x(\lambda(t)) - x(t)| \le w_x(\delta_2) \le \delta_1.$$

Поэтому

$$|f(x) - f(x(\lambda(\cdot)))| \le \varepsilon/2. \tag{3}$$

Если $\sup_{t\in[0,1]} |x(\lambda(t)) - y(t)| \le \delta_1$, то $\rho_{\text{равн}}(x(\lambda(\cdot)), y) \le \delta_1$. Поэтому

$$|f(x(\lambda(\cdot))) - f(y)| \le \varepsilon/2. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем, что

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x(\lambda(\cdot)))| + |f(x(\lambda(\cdot))) - f(y)| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2.$$

Лемма доказана.

Нетрудно понять, что равномерно непрерывными относительно метрики равномерной сходимости на $D[0,1]$ являются:

а) *экстремальные функционалы* $f(x) = \sup_{t\in[a,b]} x(t)$, где $0 \le a < b \le 1$;

б) *интегральные функционалы* $f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$, где $0 \le a < b \le 1$;

в) *проекции* $f(x) = x(a)$, где $a \in [0,1]$.

Рассмотрим примеры применения указанных результатов. Положим

$$M_n = \max_{0\le i\le n} S_i, \qquad M = \sup_{t\in[0,1]} W(t).$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда при всех* $x \ge 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \mathbf{P}(M \le x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sup_{t\in[0,1]} S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} = \sup_{t\in[0,1]} Y_n(t). \tag{5}$$

Рассмотрим следующее отображение f пространства $D[0,1]$ в $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sup_{t\in[0,1]} x(t), \quad x \in D[0,1].$$

Это отображение является равномерно непрерывным в равномерной метрике при всех $x \in D[0,1]$, поскольку при $y \in D[0,1]$

$$\left|\sup_{t\in[0,1]} x(t) - \sup_{t\in[0,1]} y(t)\right| \le \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| = \rho_{\text{равн}}(x, y).$$

По лемме 1 это отображение непрерывно относительно метрики Скорохода при всех $x \in C[0,1]$. В силу сказанного $C_f \supset C[0,1]$ и, поскольку траектории броуновского движения непрерывны, то $\mathbf{P}(W \in C_f) \ge \mathbf{P}(W \in C[0,1]) = 1$ и, значит, выполнено условие (2). Это означает, что выполнено соотношение (1), т.е. при $n \to \infty$

$$\sup_{t\in[0,1]} Y_n(t) \xrightarrow{D} M.$$

Это, ввиду соотношения (5), означает, что при $n \to \infty$

$$\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} M.$$

В терминах функций распределения получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \mathbf{P}\left(M \le x\right) \tag{6}$$

при всех $x \in \mathbb{R}$, которые являются точками непрерывности правой части.

Чтобы найти правую часть соотношения (6), воспользуемся следующим соображением. Рассмотрим *простое* случайное блуждание, определяемое соотношением

$$\mathbf{P}\left(X_1 = 1\right) = \mathbf{P}\left(X_1 = -1\right) = 1/2.$$

Для этого блуждания левую часть соотношения (6) можно найти непосредственно.

Лемма 2. *Пусть случайная величина X_1 принимает значение 1 с вероятностью $1/2$ и значение -1 с той же вероятностью. Тогда при $x \ge 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{7}$$

Доказательство. Очевидно, что при $x \ge 0$

$$\mathbf{P}\left(M_n \ge x\right) = \mathbf{P}\left(S_n = x\right) + \mathbf{P}\left(S_n > x,\ M_n \ge x\right) + \mathbf{P}\left(S_n < x,\ M_n \ge x\right). \tag{8}$$

Заметим, что при $x \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(S_n > x,\ M_n \ge x\right) = \mathbf{P}\left(S_n < x,\ M_n \ge x\right). \tag{9}$$

Действительно, чтобы найти вероятность, например, первого из этих событий, требуется найти число траекторий случайного блуждания в интервале времени от 0 до n, удовлетворяющих неравенствам $S_n > x$ и $M_n \ge x$, и затем умножить это число на вероятность одной траектории, т.е. 2^{-n}. Но число траекторий, удовлетворяющих неравенствам $S_n > x$ и $M_n \ge x$, совпадает с числом траекторий, удовлетворяющих неравенствам $S_n < x$ и $M_n \ge x$. В самом деле, если $M_n \ge x$, то момент τ_x первого достижения траекторией уровня x не превосходит n; число траекторий, ведущих за время $n - \tau_x$ из точки x в точки, лежащие не ниже x, совпадает с числом траекторий, ведущих в точки, лежащие не выше x. Далее, при $x \ge 0$

$$\mathbf{P}\left(S_n > x,\ M_n \ge x\right) = \mathbf{P}\left(S_n > x\right). \tag{10}$$

Из соотношений (8)-(10) получаем, что при $x \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(M_n \ge x\right) = 2\mathbf{P}\left(S_n > x\right) + \mathbf{P}\left(S_n = x\right) = 2\mathbf{P}\left(S_n \ge x\right) - \mathbf{P}\left(S_n = x\right). \tag{11}$$

Поскольку случайные величины M_n и S_n целочисленны, то учитывая (11), находим, что при $x \ge 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) = \mathbf{P}\left(M_n > \sigma\sqrt{n}x\right) = \mathbf{P}\left(M_n \ge \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right) =$$

$$= 2\mathbf{P}\left(S_n \ge \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right) - \mathbf{P}\left(S_n = \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right) =$$
$$= 2\mathbf{P}\left(S_n > \sigma\sqrt{n}x\right) - \mathbf{P}\left(S_n = \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right). \qquad (12)$$

По центральной предельной теореме

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(S_n > \sigma\sqrt{n}x\right) = 1 - \Phi(x), \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(S_n = \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right) = 0, \qquad (13)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа (второе равенство в (13) докажите сами). Из (12) и (13) следует, что при $x \ge 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) = 2\left(1 - \Phi(x)\right)$$

или, что равносильно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = 2\Phi(x) - 1.$$

Осталось заметить, что

$$2\Phi(x) - 1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Из (6) и (7) вытекает, что

$$\mathbf{P}(M \le x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \qquad (14)$$

при $x \ge 0$, за исключением не более чем счетного множества. Поскольку обе части соотношения (14) непрерывны справа, оно справедливо при всех $x \ge 0$. Далее, ввиду (14) вероятность $\mathbf{P}(M \le x)$ непрерывна при всех $x \ge 0$ и, следовательно, соотношение (6) справедливо при всех $x \ge 0$. Теорема доказана.

Отметим, что по теореме 1 при $x \ge 0$

$$\mathbf{P}(M \ge x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \qquad (15)$$

Пусть верхний индекс у символа $\mathbf{P}^{(x)}$ означает, что броуновское движение W стартует из точки x, а не из точки 0. Другими словами, для произвольного борелевского множества A из $C[0,1]$

$$\mathbf{P}^{(x)}(W \in A) = \mathbf{P}(x + W \in A).$$

Соотношение (15) допускает следующее усиление: при $0 < y < x$

$$\mathbf{P}\left(\, M \ge x,\ \ |W(1)| \le y\right) = \mathbf{P}^{(2x)}\left(|W(1)| \le y\right). \qquad (16)$$

Действительно, если броуновская траектория стартует из точки 0, завершается (при $t = 1$) на отрезке $[-y, y]$ и $M \geq x$, то она достигает состояния x (пусть впервые это происходит в момент τ_x). Если отразить часть этой траектории до момента τ_x относительно прямой l_x, ординаты точек которой равны x, то получится броуновская траектория, стартующая из точки $2x$ и завершающаяся на $[-y, y]$. Наоборот, если броуновская траектория стартует из точки $2x$ и завершается на $[-y, y]$, то она достигает состояния x (пусть впервые это происходит в момент τ'_x). Если отразить часть этой траектории до момента τ'_x относительно прямой l_x, то получится броуновская траектория, которая стартует из точки 0, завершается на $[-y, y]$ и имеет максимальное значение, не меньшее чем x. Итак, соотношение (16) доказано. Использованное здесь рассуждение получило название *принципа отражения*. Строгое его обоснование можно получить по аналогии с доказательством теоремы 1.