Лекция 9

Броуновский мост

Наряду с принципом инвариантности Донскера–Прохорова существуют и другие функциональные предельные теоремы для случайных блужданий, в которых последние рассматриваются при некоторых условиях, касающихся их траекторий. Такие случайные блуждания и соответствующие им теоремы получили название *условных*. Мы изучим одну из таких условных функциональных предельных теорем, но сначала познакомимся со случайным процессом, играющим роль предельного процесса в этой теореме.

Определение 1. Случайный процесс $\{W_0(t), \ t \in [0,1]\}$ называется *броуновским мостом*, если
1) $W_0(0) = 0$ п.н.;
2) все конечномерные распределения нормальны;
3) $\mathbf{E}W_0(t) = 0$, $\mathbf{E}W_0(s)\,W_0(t) = s(1-t)$ при $0 \le s \le t \le 1$;
4) траектории W_0 п.н. непрерывны .

Заметим, что $W_0(1) = 0$ п.н. В качестве примера броуновского моста можно рассмотреть процесс $\{W(t) - tW(1), \ t \in [0,1]\}$, где $\{W(t), \ t \ge 0\}$ – броуновское движение. Условия 1), 2) и 4) выполняются. Далее, при $0 \le s \le t \le 1$

$$\mathbf{E}(W(t) - tW(1)) = 0,$$

$$\mathbf{E}(W(s) - sW(1))(W(t) - tW(1)) =$$

$$= \mathbf{E}W(s)W(t) - t\mathbf{E}W(s)W(1) - s\mathbf{E}W(1)W(t) + st\mathbf{E}W^2(1) = s(1-t).$$

Как и в случае броуновского движения, будем считать, что все траектории броуновского моста являются непрерывными.

Пусть X – случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Пусть $A \in \mathcal{F}$ и $\mathbf{P}(A) > 0$. Обозначим $\{X \mid A\}$ случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(A, \ \mathcal{F} \cap A, \ \mathbf{P}(\cdot \mid A))$, где $\mathbf{P}(\cdot \mid A)$ – условная вероятностная мера ($\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(A)$ при $B \in \mathcal{F} \cap A$) и определяемый формулой

$$\{X \mid A\}(\omega) = X(\omega), \ \omega \in A.$$

Положим при $\varepsilon > 0$

$$W_\varepsilon = \{W \mid \ |W(1)| \le \varepsilon\}.$$

Теорема 1. *При* $\varepsilon \to 0$

$$W_\varepsilon \xrightarrow{D} W_0,$$

где знак $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в* $C[0,1]$.

Доказательство. Возьмем в качестве W_0 процесс $\{W(t) - tW(1), \ t \in [0,1]\}$. Покажем, что этот процесс не зависит от случайной величины $W(1)$.

Сначала покажем, что для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и произвольных моментов времени $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le 1$ вектор $\{W_0(t_1), W_0(t_2), \ldots, W_0(t_m)\}$ не зависит от величины $W(1)$. Действительно, рассмотрим случайный вектор $\{W_0(t_1), \ldots, W_0(t_m), W(1)\}$. Он имеет нормальное распределение. Поэтому независимость $W(1)$ от остальных компонент равносильна равенствам

$$cov\left(W(1), W_0(t_k)\right) = 0, \ k = 1, \ldots, m.$$

Проверим их:

$$cov\left(W(1), W_0(t_k)\right) = cov\left(W(1), W(t_k) - t_k W(1)\right) =$$

$$= \mathbf{E}W(1)\,W(t_k) - t_k \mathbf{E}W^2(1) = 0.$$

Из доказанного следует (установите это сами), что случайная величина $W(1)$ не зависит от случайного события $\{W_0 \in A\}$ для любого множества A из цилиндрической σ-алгебры в пространстве $C[0,1]$. Вспомним, что эта σ-алгебра совпадает с борелевской σ-алгеброй в $C[0,1]$ относительно равномерной топологии. Следовательно, случайная величина $W(1)$ не зависит от случайного события $\{W_0 \in A\}$ для любого борелевского множества A пространства $C[0,1]$. Итак, требуемое утверждение доказано.

В силу доказанного для любого борелевского множества A из $C[0,1]$

$$\mathbf{P}\left(W_0 \in A \mid \ |W(1)| \le \varepsilon\right) = \mathbf{P}(W_0 \in A). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь произвольное замкнутое множество F из $C[0,1]$. Покажем, что

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}\left(W \in F \mid \ |W(1)| \le \varepsilon\right) \le \mathbf{P}\left(W_0 \in F\right). \tag{2}$$

Если $|W(1)| \le \varepsilon$ и $W \in F$, то $W_0 \in F_\varepsilon = \left\{x : \rho_{\text{равн}}(x, F) \le \varepsilon\right\}$. Откуда с учетом (1) получаем, что

$$\mathbf{P}(W \in F \mid \ |W(1)| \le \varepsilon) \le \mathbf{P}(W_0 \in F_\varepsilon \mid \ |W(1)| \le \varepsilon) = \mathbf{P}(W_0 \in F_\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}\left(W \in F \mid \ |W(1)| \le \varepsilon\right) \le \limsup_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}\left(W_0 \in F_\varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(W_0 \in F\right).$$

Последнее равенство объясняется тем, что множества F_ε убывают с уменьшением ε и $\bigcap_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon = F$. Итак, соотношение (2) доказано. Из соотношения (2) по теореме Александрова следует утверждение теоремы.

В дальнейшем нам потребуется понятие марковского процесса. Положим $I_m = \{1, \ldots, m\}$.

Определение 2. Неотрицательная числовая функция $p(s, x; t, y)$, где *временные* переменные s, t неотрицательны, причем $s < t$, и *пространственные* переменные x, y принадлежат $\mathbb{R}$, называется *переходной плотностью*, если эта функция измерима по паре пространственных переменных и

1) для произвольных s, t и x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p\,(s, x; t, y)\, dy = 1,$$

2) для произвольных s, u, t $(0 \le s < u < t)$ и x, y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p\,(s, x; u, z)\, p\,(u, z; t, y)\, dz = p\,(s, x; t, y)\,.$$

Определение 3. Случайный процесс $\{X\,(t)\,,\ t \ge 0\}$, стартующий из состояния $x_0 \in \mathbb{R}$, называется *марковским процессом с переходной плотностью* $p\,(s, x; t, y)$, если для произвольного $m \in \mathbb{N}$, произвольных моментов времени $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < +\infty$ и произвольных $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\mathbf{P}\,(X(t_k) \le a_k,\ k \in I_m) =$$

$$= \int \cdots \int_{G_m(a_1,\ldots,a_m)} p(0, x_0; t_1, x_1) p(t_1, x_1; t_2, x_2) \ldots p(t_{m-1}, x_{m-1}; t_m, x_m) dx_1 \ldots dx_m,$$

где

$$G_m\,(a_1, \ldots, a_m) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) : x_1 \le a_1, \ldots,\ x_m \le a_m\}\,.$$

Укажем также, что если зависимость переходной плотности от временных переменных есть на самом деле зависимость от $t - s$, то марковский процесс называется *однородным*, а в противном случае – *неоднородным*.

Заметим, что броуновское движение $\{W\,(t)\,,\ t \ge 0\}$ является однородным марковским процессом с переходной плотностью

$$p\,(s, x; t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}},\ 0 \le s < t < +\infty,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Покажем, например, что

$$\mathbf{P}\,(W(t_1) \le a_1,\ W(t_2) \le a_2) = \iint_{x_1 \le a_1,\ x_2 \le a_2} p(0, 0; t_1, x_1) p(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2.$$

В самом деле, случайный вектор $(W(t_1), W(t_2))$ имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\mathbf{P}\,(W(t_1) \le a_1,\ W(t_2) \le a_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1\,(t_2 - t_1)}} \iint_{x_1 \le a_1,\ x_2 \le a_2} \exp\left(-\frac{t_2 x_1^2 - 2t_1 x_1 x_2 + t_1 x_2^2}{2t_1\,(t_2 - t_1)}\right) dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1\left(t_2-t_1\right)}} \iint\limits_{x_1\le a_1,\ x_2\le a_2} \exp\left(-\frac{\left(t_2-t_1\right)x_1^2+t_1\left(x_2-x_1\right)^2}{2t_1\left(t_2-t_1\right)}\right)dx_1dx_2 =$$

$$= \iint\limits_{x_1\le a_1,\ x_2\le a_2} p(0,0;t_1,x_1)p(t_1,x_1;t_2,x_2)dx_1dx_2.$$

Теорема 2. *Броуновский мост является неоднородным марковским процессом с переходной плотностью*

$$p_0(s,x;t,y) = \frac{p(t,y;1,0)}{p(s,x;1,0)}p(s,x;t,y),\ 0\le s<t<1,\ x,y\in\mathbb{R},$$

где $p(s,x;t,y)$ *– переходная плотность броуновского движения.*

Доказательство. Пусть $m\in\mathbb{N}$ и $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_m<t_{m+1}=1$. Требуется показать, что для произвольных $a_1,a_2,\ldots,a_m\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\mathbf{P}\left(W_0(t_k)\le a_k,\ k\in I_m\right) =$$

$$= \int\limits_{G_m(a_1,\ldots,a_m)}\!\!\cdots\!\int p_0(0,0;t_1,x_1)p_0(t_1,x_1;t_2,x_2)\ldots p_0(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)dx_1\ldots dx_m. \tag{3}$$

По теореме 1, учитывая, что случайный вектор $\{W_0(t_1),\ldots,W_0(t_m)\}$ принадлежит границе множества $G_m\left(a_1,\ldots,a_m\right)$ с нулевой вероятностью, получаем, что

$$\mathbf{P}\left(W_0(t_k)\le a_k,\ k\in I_m\right) = \lim_{\varepsilon\to0}\mathbf{P}\left(W(t_k)\le a_k,\ k\in I_m \mid |W(1)|\le\varepsilon\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\mathbf{P}\left(W(t_k)\le a_k,\ k\in I_m;\ \ |W(1)|\le\varepsilon\right)}{\mathbf{P}(|W(1)|\le\varepsilon)}.$$

Поскольку броуновское движение является однородным марковским процессом с переходной плотностью $p\left(s,x;t,y\right)$, то

$$\mathbf{P}\left(W(t_k)\le a_k,\ k\in I_m;\ \ |W(1)|\le\varepsilon\right) =$$

$$= \int\limits_{G_m(a_1,\ldots,a_m)\times[-\varepsilon,\varepsilon]}\!\!\cdots\!\int \prod_{k=0}^{m} p\left(t_k,x_k;t_{k+1},x_{k+1}\right)dx_1\ldots dx_{m+1} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\left(x_{m+1}\right)dx_{m+1},$$

где

$$f\left(x_{m+1}\right) = \int\limits_{G_m(a_1,\ldots,a_m)}\!\!\cdots\!\int \prod_{k=0}^{m} p\left(t_k,x_k;t_{k+1},x_{k+1}\right)dx_1\ldots dx_m$$

(считаем, что $x_0=0$). Итак,

$$\mathbf{P}\left(W_0(t_k)\le a_k,\ k\in I_m\right) = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\left(x_{m+1}\right)dx_{m+1}}{\mathbf{P}(|W(1)|\le\varepsilon)}. \tag{4}$$

Обозначим $p\,(x)$ плотность вероятностей случайной величины $W(1)$. Очевидно, что при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbf{P}(|W(1)| \le \varepsilon) \sim 2\varepsilon p\,(0)\,, \tag{5}$$

где $p\,(0) = 1/\sqrt{2\pi} = p(0,0;1,0)$. Далее, при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\,(x_{m+1})\,dx_{m+1} \sim 2\varepsilon f\,(0)\,. \tag{6}$$

Из соотношений (4)-(6) находим, что

$$\mathbf{P}\,(W_0(t_k) \le a_k,\ k \in I_m) = \frac{f\,(0)}{p\,(0)} =$$

$$= \int\limits_{G_m(a_1,\ldots,a_m)}\!\!\!\cdots\!\int p(0,0;t_1,x_1)\ldots p(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)\frac{p(t_m,x_m;1,0)}{p(0,0;1,0)}dx_1\ldots dx_m. \tag{7}$$

Заметим, что

$$\prod_{k=0}^{m-1} p_0(t_k,x_k;t_{k+1},x_{k+1}) = p(0,0;t_1,x_1)\ldots p(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)\frac{p(t_m,x_m;1,0)}{p(0,0;1,0)}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует требуемое соотношение (3). Теорема доказана.

Замечание 1. Оказывается, что

$$p_0\,(s,x;t,y) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}}\exp\left(-\frac{y^2}{2t(1-t)}\right), \ 0 = s < t < 1,\ x = 0,\ y \in \mathbb{R}; \\ \sqrt{\frac{1-s}{2\pi(t-s)(1-t)}}\exp\left(-\frac{((1-s)y-(1-t)x)^2}{2(1-s)(t-s)(1-t)}\right),\ 0 < s < t < 1,\ x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{9}$$

Докажем (9) при $k = 0$:

$$p_0(0,0;t_1,x_1) = p(0,0;t_1,x_1)\frac{p(t_1,x_1;1,0)}{p(0,0;1,0)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}}\,\frac{1}{\sqrt{1-t_1}}e^{-\frac{x_1^2}{2(1-t_1)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1(1-t_1)}}e^{-\frac{x_1^2}{2t_1(1-t_1)}} = p_0(0,0;t_1,x_1).$$

Введем *функцию распределения Колмогорова*:

$$K\,(0) = 0, \qquad K\,(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \exp\left(-2k^2x^2\right), \quad x > 0.$$

Теорема 3. *При* $x \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |W_0(t)| \leq x\right) = K(x).$$

Доказательство. По теореме 1 при $x > 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |W_0(t)| \leq x\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |W(t)| \leq x \;\middle|\; |W(1)| \leq \varepsilon\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |W(t)| \leq x,\ \ |W(1)| \leq \varepsilon\right) / \mathbf{P}\left(|W(1)| \leq \varepsilon\right). \tag{10}$$

Из теоремы 1 лекции 8.2 следует, что при $\varepsilon \in (0, x)$

$$\mathbf{P}(\sup_{t\in[0,1]} |W(t)| \leq x,\ \ |W(1)| \leq \varepsilon) =$$

$$= \mathbf{P}(\ |W(1)| \leq \varepsilon) - \mathbf{P}(\sup_{t\in[0,1]} |W(t)| \geq x,\ \ |W(1)| \leq \varepsilon) =$$

$$= \mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon) - 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mathbf{P}^{((4k-2)x)}\left(|W(1)| \leq \varepsilon\right) - \mathbf{P}^{(4kx)}\left(|W(1)| \leq \varepsilon\right)\right). \tag{11}$$

Нетрудно понять, что для каждого $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}^{(a)}\left(|W(1)| \leq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(|a + W(1)| \leq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(W(1) \in [-a-\varepsilon, -a+\varepsilon]\right) =$$

$$= \Phi(-a+\varepsilon) - \Phi(-a-\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a-\varepsilon}^{-a+\varepsilon} e^{-u^2/2}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-u^2/2}du. \tag{12}$$

Значит, функция $h_\varepsilon(a) := \mathbf{P}^{(a)}\left(|W(1)| \leq \varepsilon\right)$ убывает при $a \in [\varepsilon, +\infty)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mathbf{P}^{((4k-2)x)}\left(|W(1)| \leq \varepsilon\right) - \mathbf{P}^{(4kx)}\left(|W(1)| \leq \varepsilon\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(h_\varepsilon\left((4k-2)x\right) - h_\varepsilon(4kx)\right) = h_\varepsilon(2x) - h_\varepsilon(4x) + h_\varepsilon(6x) - h_\varepsilon(8x) + \ldots, \tag{13}$$

причем последний ряд является знакочередующимся и (поскольку $x > \varepsilon$) модули его членов убывают. Из соотношений (11) и (13) находим, что

$$\mathbf{P}(\sup_{t\in[0,1]} |W(t)| \leq x,\ \ |W(1)| \leq \varepsilon) = h_\varepsilon(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k h_\varepsilon(2kx). \tag{14}$$

В силу (12)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h_\varepsilon(a)}{\mathbf{P}\left(|W(1)| \leq \varepsilon\right)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbf{P}^{(a)}\left(|W(1)| \leq \varepsilon\right)}{\mathbf{P}\left(|W(1)| \leq \varepsilon\right)} = e^{-\frac{a^2}{2}}. \tag{15}$$

Из соотношений (14) и (15) находим, что для произвольного $L \in \mathbb{N}$

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{2L+1} (-1)^k e^{-2k^2x^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{2L+1} (-1)^k \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{h_\varepsilon (2kx)}{\mathbf{P} (|W(1)| \le \varepsilon)} \le$$

$$\le \liminf_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |W(t)| \le x,\ \ |W(1)| \le \varepsilon \right) / \mathbf{P}(|W(1)| \le \varepsilon) \le$$

$$\le \limsup_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |W(t)| \le x,\ \ |W(1)| \le \varepsilon \right) / \mathbf{P}(|W(1)| \le \varepsilon) \le$$

$$\le 1 + 2 \sum_{k=1}^{2L} (-1)^k \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{h_\varepsilon (2kx)}{\mathbf{P} (|W(1)| \le \varepsilon)} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{2L} (-1)^k e^{-2k^2x^2}.$$

Откуда, переходя к пределу при $L \to \infty$, получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |W(t)| \le x,\ \ |W(1)| \le \varepsilon \right) / \mathbf{P}(|W(1)| \le \varepsilon) =$$

$$= 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2} = K(x).$$

Теорема 3 доказана.