Лекция 8.2

Приложения принципа инвариантности Донскера-Прохорова

Теорема 1. *При* $0 < y < x$ *справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |W(t)| \geq x,\ \ |W(1)| \leq y\right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mathbf{P}^{((4k-2)x)}\left(|W(1)| \leq y\right) - \mathbf{P}^{(4kx)}\left(|W(1)| \leq y\right)\right).$$

Доказательство. Пусть A_0 – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки 0, достигает состояния x раньше, чем состояния $(-x)$, и завершается на $[-y, y]$.

Применяя принцип отражения броуновской траектории относительно прямой l_x, получаем, что

$$\mathbf{P}(A_0) = \mathbf{P}(A_2),$$

где A_2 – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки $2x$, достигает состояния x раньше, чем состояния $3x$, и завершается на отрезке $[-y, y]$. Ясно, что

$$\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_2') - \mathbf{P}(A_2''),$$

где A_2' – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки $2x$, завершается на $[-y, y]$; A_2'' – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки $2x$, достигает состояния $3x$ раньше, чем состояния x, и завершается на $[-y, y]$.

Далее, применяя принцип отражения броуновской траектории относительно прямой l_{3x}, получаем, что

$$\mathbf{P}(A_2'') = \mathbf{P}(A_4),$$

где A_4 – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки $4x$, достигает состояния $3x$ раньше, чем состояния $5x$, и завершается на $[-y, y]$. Ясно, что

$$\mathbf{P}(A_4) = \mathbf{P}(A_4') - \mathbf{P}(A_4''),$$

где A_4' – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки $4x$, завершается на $[-y, y]$; A_4'' – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки $4x$, достигает состояния $5x$ раньше, чем состояния $3x$, и завершается на $[-y, y]$.

Продолжая эти рассуждения, в итоге получаем, что

$$\mathbf{P}(A_0) = \mathbf{P}(A_2') - \mathbf{P}(A_2'') = \mathbf{P}(A_2') - \left(\mathbf{P}(A_4') - \mathbf{P}(A_4'')\right) =$$

$$= \mathbf{P}(A_2') - \mathbf{P}(A_4') + (\mathbf{P}(A_6') - \mathbf{P}(A_6'')) =$$
$$= \mathbf{P}(A_2') - \mathbf{P}(A_4') + \mathbf{P}(A_6') - (\mathbf{P}(A_8') - \mathbf{P}(A_8'')) = \ldots =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mathbf{P}^{((4k-2)x)}(|W(1)| \le y) - \mathbf{P}^{(4kx)}(|W(1)| \le y) \Big). \qquad (1)$$

Пусть B_0 – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки 0, достигает состояния $(-x)$ раньше, чем состояния x, и завершается на $[-y, y]$. Из соображений симметрии

$$\mathbf{P}(B_0) = \mathbf{P}(A_0). \qquad (2)$$

Поскольку

$$\left\{ \sup_{t\in[0,1]} |W(t)| \ge x, \ \ |W(1)| \le y \right\} = A_0 \cup B_0 \text{ и } A_0 \cap B_0 = \varnothing,$$

то из формул (1) и (2) следует утверждение теоремы.

По случайному блужданию $S_0, S_1, \ldots$, удовлетворяющему условиям теоремы 1, определим случайный процесс, используя линейную интерполяцию:

$$S(t) = S_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor)\left(S_{\lfloor t \rfloor + 1} - S_{\lfloor t \rfloor}\right), \quad t \ge 0.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введем случайный процесс, заданный на отрезке $[0, 1]$:

$$\widetilde{Y}_n(t) = \frac{S(nt)}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in [0,1].$$

Траектории этого процесса непрерывны и при $n \to \infty$

$$\widetilde{Y}_n \xrightarrow{D} W, \qquad (3)$$

где W – стандартное броуновское движение, а знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $C[0, 1]$ с метрикой равномерной сходимости. Соотношение (3) также называется *принципом инвариантности Донскера-Прохорова* и доказывается аналогично.

Следовательно (см. теорему $1'$ лекции 4), при $n \to \infty$

$$f\left(\widetilde{Y}_n\right) \xrightarrow{D} f(W), \qquad (4)$$

где f – такой функционал, заданный на $C[0, 1]$, что

$$\mathbf{P}(W \in C_f) = 1 \qquad (5)$$

(здесь C_f – множество тех элементов $C[0, 1]$, в которых функционал f непрерывен относительно метрики равномерной сходимости).

Введем для броуновского движения $\{W(t), \ t \in [0, 1]\}$ *момент последнего попадания* в точку 0:

$$\tau = \sup\{t \in [0,1] : W(t) = 0\}.$$

Теорема 2. *При всех* $u \in [0,1]$

$$\mathbf{P}\left(\tau \le u\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{u}.$$

Доказательство. Положим для $x \in C\,[0,1]$ (предполагаем при этом, что $x\,(0) = 0$)

$$\tau^{(x)} = \sup\left\{t \in [0,1] : x\,(t) = 0\right\}.$$

Рассмотрим следующий функционал на пространстве $C\,[0,1]$: $f(x) = \tau^{(x)}$, $x \in C\,[0,1]$. Этот функционал является измеримым, но существуют $x \in C\,[0,1]$, при которых этот функционал не является непрерывным (например, $x\,(t) = 0$ при $t \in [0,1/2]$ и $x\,(t) = t - 1/2$ при $[1/2,1]$).

Однако этот функционал является непрерывным на броуновских траекториях. Чтобы это объяснить, сначала заметим, что с вероятностью 0 максимум (минимум) траектории броуновского движения хотя бы на одном отрезке $[a,b]$, где a,b рациональны и $0 \le a < b \le 1$, равен 0. Действительно, по теореме 1 предыдущей лекции распределение максимума (и, значит, минимума) броуновской траектории на отрезке $[0,1]$ является абсолютно непрерывным, поэтому вероятность того, что этот максимум (минимум) равен 0, равна 0: аналогично показывается, что максимум (минимум) на произвольном отрезке $[a_i,b_i]$, где a_i,b_i рациональны, обращается в 0 с вероятностью 0 и, следовательно, объединение счетного числа таких событий имеет вероятность 0.

Из сказанного следует, что при всех рациональных числах a, которые меньше τ, на отрезке $[a,\tau]$ найдется такая точка t_a, что $W(t_a) \ne 0$ и знак $W(t_a)$ отличается от знака $W(t)$ при $t > \tau$ (иначе максимум или минимум броуновской траектории на отрезке $[a,1]$ равен 0.

Покажем теперь, что если $x \in C\,[0,1]$ и при всех рациональных числах a, которые меньше $\tau^{(x)}$, на отрезке $\left[a,\tau^{(x)}\right]$ найдется такая точка t_a, что $x(t_a) \ne 0$ и знак $x(t_a)$ отличается от знака $x(t)$ при $t > \tau^{(x)}$, то отображение $\tau^{(x)}$ является непрерывным в точке x.

Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и положим $a = \tau^{(x)} - \varepsilon$. По условию существует такая точка $t_a \in \left[a,\tau^{(x)}\right]$, что

$$x(t_a)x\left(\tau^{(x)} + \varepsilon\right) < 0.$$

Подберем положительное δ так, чтобы $\delta < |x\,(t_a)|$ и $\delta < \inf_{t \ge \tau^{(x)}+\varepsilon} |x\,(t)|$. Если $y \in C\,[0,1]$ и $\rho_{\text{равн}}\,(x,y) \le \delta$, то $y\,(t_a)$ имеет тот же знак, что и $x\,(t_a)$, а $y\left(\tau^{(x)} + \varepsilon\right)$ имеет тот же знак, что и $x\left(\tau^{(x)} + \varepsilon\right)$. Поэтому

$$y\,(t_a)\,y\left(\tau^{(x)} + \varepsilon\right) < 0.$$

Кроме того, $\inf_{t \ge \tau^{(x)}+\varepsilon} |y\,(t)| > 0$. В силу этого $\tau^{(y)} \in \left[t_a, \tau^{(x)} + \varepsilon\right]$ и, следовательно, $\left|\tau^{(y)} - \tau^{(x)}\right| \le \varepsilon$. Требуемое утверждение доказано.

Итак, условие (5) выполнено и, следовательно, выполнено соотношение (4), т.е. при $n \to \infty$

$$\tau^{\left(\tilde{Y}_n\right)} \xrightarrow{D} \tau.$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно показать, что при $0 < a < b < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(a < \tau^{\left(\widetilde{Y}_n\right)} \le b\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}|_a^b, \tag{6}$$

причем (6) достаточно установить в каком-либо частном случае.

Пусть теперь $\{S_i,\ i \in \mathbb{N}_0\}$ – простое случайное блуждание и

$$\tau(n) = \max\{i \le n : S_i = 0\}.$$

Очевидно, $\tau^{\left(\widetilde{Y}_n\right)} = \tau(n)/n$, поэтому соотношение (6) принимает следующий вид: при $0 < a < b < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(a < \frac{\tau(2n)}{2n} \le b\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}|_a^b. \tag{7}$$

Положим

$$u_{2n} = \mathbf{P}\left(\ S_{2n} = 0\right) = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{8}$$

Оказывается (докажите самостоятельно), что

$$\mathbf{P}\left(S_1 \ne 0,\ S_2 \ne 0, \ldots,\ S_{2n} \ne 0\right) = u_{2n}. \tag{9}$$

Вспоминая, что $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ при $n \to \infty$ (формула Стирлинга) находим, что

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \tag{10}$$

По марковскому свойству случайного блуждания при $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\mathbf{P}\left(\tau\left(2n\right) = 2k\right) = \mathbf{P}\left(S_{2k} = 0,\ S_{2k+1} \ne 0, \ldots,\ S_{2n} \ne 0\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(S_{2k} = 0,\ S_{2k+1} - S_{2k} \ne 0, \ldots,\ S_{2n} - S_{2k} \ne 0\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(S_{2k} = 0\right) \mathbf{P}\left(S_{2k+1} - S_{2k} \ne 0, \ldots,\ S_{2n} - S_{2k} \ne 0\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(S_{2k} = 0\right) \mathbf{P}\left(S_1 \ne 0, \ldots,\ S_{2n-2k} \ne 0\right).$$

Откуда, вспоминая (8) и (9), находим, что при $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\mathbf{P}\left(\tau\left(2n\right) = 2k\right) = u_{2k} u_{2n-2k}. \tag{11}$$

Ввиду (11)

$$\mathbf{P}\left(a < \frac{\tau\left(2n\right)}{2n} \le b\right) = \sum_{a < k/n \le b} \mathbf{P}\left(\tau\left(2n\right) = 2k\right) = \sum_{a < k/n \le b} u_{2k} u_{2n-2k}. \tag{12}$$

Ввиду (10) для произвольного $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n

$$\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\pi k}} \le u_{2k} \le \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\pi k}}, \qquad \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\pi\left(n-k\right)}} \le u_{2n-2k} \le \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\pi\left(n-k\right)}},$$

если $a < k/n \le b$. Поэтому

$$\sum_{a < \frac{k}{n} \le b} \frac{\left(1-\varepsilon\right)^2}{\pi\sqrt{k\left(n-k\right)}} \le \sum_{a < \frac{k}{n} \le b} u_{2k} u_{2n-2k} \le \sum_{a < \frac{k}{n} \le b} \frac{\left(1+\varepsilon\right)^2}{\pi\sqrt{k\left(n-k\right)}}. \tag{13}$$

Но

$$\sum_{a<k/n\le b}\frac{1}{\sqrt{k\,(n-k)}}=\sum_{a<k/n\le b}\frac{1}{\sqrt{(k/n)\,(1-(k/n))}}\,\frac{1}{n}\quad\overset{n\to\infty}{\to}\int\limits_a^b\frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}},$$

поскольку вторая сумма является интегральной суммой для последнего интеграла. Переходя в (13) к пределу при $n\to\infty$ и учитывая, что

$$\int\limits_a^b\frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}}=2\arcsin\sqrt{x}\big|_a^b,$$

получаем, что

$$(1-\varepsilon)^2\,\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\big|_a^b\le\liminf_{n\to\infty}\sum_{a<k/n\le b}u_{2k}u_{2n-2k}\le$$

$$\le\limsup_{n\to\infty}\sum_{a<k/n\le b}u_{2k}u_{2n-2k}\le(1+\varepsilon)^2\,\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\big|_a^b.$$

Откуда, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{a<k/n\le b}u_{2k}u_{2n-2k}=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\big|_a^b. \tag{14}$$

Из (12) и (14) следует требуемое соотношение (7). Теорема доказана.