

## Лекция 6

### Условия сходимости по распределению случайных процессов с траекториями без разрывов второго рода

Рассмотрим пространство  $D[0, 1]$  числовых функций, имеющих пределы слева и непрерывных справа на отрезке  $[0, 1]$ . Такие функции измеримы, ограничены и имеют не более чем счетное множество точек разрыва; причем число точек, разрыв в которых превосходит заданное положительное число, конечно.

Введем на  $D[0, 1]$  метрику Скорохода: для  $x, y \in D[0, 1]$

$$\rho_{\text{ск}}(x, y) = \inf_{\lambda} \max \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0, 1]} |x(\lambda(t)) - y(t)| \right\}.$$

Инфимум здесь берется по всем строго возрастающим и непрерывным отображениям  $\lambda$  отрезка  $[0, 1]$  на себя. Две функции в этой метрике близки друг к другу, если график одной из них получается из графика другой с помощью небольших деформаций как вдоль оси ординат, так и вдоль оси абсцисс. Очевидно, что  $\rho_{\text{равн}}(x, y) \geq \rho_{\text{ск}}(x, y)$ .

**Пример 1.** Пусть

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; 1/2); \\ 1/2, & t \in [1/2; 1]; \end{cases} \quad \text{и} \quad y(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; 2/3); \\ 1/2, & t \in [2/3; 1]. \end{cases}$$

Ясно, что  $\rho_{\text{равн}}(x, y) = 1/2$ . Пусть

$$\lambda(t) = \begin{cases} 3t/4, & t \in [0; 2/3); \\ 1/2 + (3/2)(t - 2/3), & t \in [2/3; 1]. \end{cases}$$

Тогда  $\lambda(2/3) = 1/2$  и

$$x(\lambda(t)) \equiv y(t), \quad \sup_{t \in [0, 1]} |x(\lambda(t)) - y(t)| = 0, \quad \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda(t) - t| = 1/6.$$

Нетрудно показать, что  $\rho_{\text{ск}}(x, y) = 1/6$ .

Пространство  $D[0, 1]$  с метрикой Скорохода сепарабельно. В нем всюду плотно множество ступенчатых функций, принимающих рациональные значения в точке 1 и на промежутках  $[i/k, (i+1)/k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , а  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ .

Положим для  $x \in D[0, 1]$  и  $a, b$  таких, что  $0 \leq a < b \leq 1$ ,

$$w_x[a, b] = \sup_{s, t \in [a, b]} |x(s) - x(t)|.$$

Напомним, что разбиением отрезка  $[0, 1]$  называется совокупность точек  $t_0, t_1, \dots, t_r$  (при  $r \in \mathbb{N}$ ) таких, что  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ . Введем модуль непрерывности для  $x \in D[0, 1]$ :

$$w'_x(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_i w_x[t_i, t_{i+1}],$$

где  $\delta$  – положительное число, а инфимум берется по всем разбиениям  $\{t_i\}$  отрезка  $[0, 1]$ , для которых  $\min_i (t_{i+1} - t_i) \geq \delta$ . Заметим, что ранее можно было определить аналогичный модуль непрерывности для непрерывных функций (достаточный для наших целей):

$$\tilde{w}_x(\delta) = \max \{w_x[0, \delta], w_x[\delta, 2\delta], \dots\}.$$

Если  $x$  – ступенчатая функция и  $\delta$  не больше наименьшей длины ступенек, то  $w'_x(\delta) = 0$ . Однако, если функция  $x$ , принадлежащая  $D[0, 1]$ , имеет конечное число точек разрыва, то ее модуль непрерывности  $w'_x(\delta)$  может отличаться от  $w'_x(\delta)$  (при всех достаточно малых  $\delta$ ), где  $\tilde{w}_x$  – непрерывная функция, получающаяся из  $x$  путем устранения разрывов (приведите пример).

**Лемма 1.** *Если числовая функция  $x$ , заданная на отрезке  $[0, 1]$ , принадлежит пространству  $D[0, 1]$ , то  $\lim_{\delta \rightarrow 0} w'_x(\delta) = 0$ .*

*Доказательство.* Достаточно для любого  $\varepsilon > 0$  установить существование такого разбиения  $\{t_i\}$  отрезка  $[0, 1]$ , для которого  $\max_i w_x[t_i, t_{i+1}] < \varepsilon$  (тогда  $w'_x(\delta) < \varepsilon$  при  $\delta \leq \min_i (t_{i+1} - t_i)$ ). Рассмотрим множество  $B$ , состоящее из таких  $t \in (0, 1]$ , для которых существует такое разбиение  $\{t_i^{(t)}\}$  отрезка  $[0, t]$ , что  $\max_i w_x[t_i^{(t)}, t_{i+1}^{(t)}] < \varepsilon$ . Это множество не пусто, поскольку в силу непрерывности функции  $x$  справа в точке 0, существует такое  $t \in (0, 1]$ , что  $w_x[0, t] < \varepsilon$ . Ясно, что это  $t \in B$  (соответствующее разбиение отрезка  $[0, t]$  состоит из двух точек 0 и  $t$ ). Пусть  $\tau$  – точная верхняя грань множества  $B$ . Покажем, что  $\tau \in B$ . Действительно, существует  $t$  такое, что  $t < \tau$  и при этом существует такое разбиение  $\{t_i^{(t)}\}$  отрезка  $[0, t]$ , что  $\max_i w_x[t_i^{(t)}, t_{i+1}^{(t)}] < \varepsilon$ . Это  $t$  можно выбрать сколь угодно близко к точке  $\tau$ , поскольку  $\tau$  – точная верхняя грань множества  $B$ . У функции  $x$  существует предел слева в точке  $\tau$ , поэтому  $t$  можно подобрать так, что  $w_x[t, \tau] < \varepsilon$ . Тогда требуемое разбиение  $\{t_i^{(\tau)}\}$  отрезка  $[0, \tau]$  получается добавлением к разбиению  $\{t_i^{(t)}\}$  еще одной точки  $\tau$ . Покажем, что  $\tau$  не может быть меньше 1. В противном случае ввиду непрерывности функции  $x$  справа в точке  $\tau$  существует такое  $t$ , что  $t > \tau$  и  $w_x[\tau, t] < \varepsilon$ . Тогда это  $t \in B$  (соответствующее разбиение отрезка  $[0, t]$  получается из разбиения  $\{t_i^{(\tau)}\}$  отрезка  $[0, \tau]$  добавлением еще одной точки  $t$ ). Приходим к противоречию. Итак,  $\tau = 1$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Если  $x \in D[0, 1]$ , то при  $\delta > 0$  справедливо неравенство  $w'_x(\delta) \leq w_x(2\delta)$ .*

*Доказательство.* Разобьем отрезок  $[0, 1]$  так, чтобы  $\delta \leq t_{i+1} - t_i \leq 2\delta$ . Тогда для любого  $i$  выполняется неравенство  $w_x(2\delta) \geq w_x[t_i, t_{i+1}]$  и, сле-

довательно,

$$w_x(2\delta) \geq \max_i w_x[t_i, t_{i+1}] \geq w'_x(\delta).$$

Лемма доказана.

Для произвольной функции  $x \in D[0, 1]$  построим ее *ступенчатое приближение*  $x^{(\delta)}$  при  $\delta = 1/m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ :

$$x^{(\delta)}(t) = \begin{cases} x(\delta k), & t \in [\delta k, \delta(k+1)), & k \in \{0, 1, \dots, m-1\}; \\ x(1), & t = 1. \end{cases}$$

Зададим отображение  $g^{(m)} : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow D[0, 1]$ . Произвольному вектору  $\bar{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$  сопоставим ступенчатую функцию  $g^{(m)}(\bar{x}) \in D[0, 1]$ :

$$(g^{(m)}(\bar{x}))(t) = \begin{cases} x_k, & t \in [\delta k, \delta(k+1)), & k \in \{0, 1, \dots, m-1\}; \\ x_m, & t = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что отображение  $g^{(m)}$  является непрерывным и

$$x^{(\delta)} = g^{(m)}(x(0), x(1/m), x(2/m), \dots, x(1)).$$

**Лемма 3.** Если  $x \in D[0, 1]$ , то при  $\delta > 0$  справедливо неравенство

$$\rho_{\text{СК}}(x, x^{(\delta)}) \leq w'_x(\delta) + \delta,$$

поэтому

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho_{\text{СК}}(x, x^{(\delta)}) = 0.$$

*Доказательство.* Существует такое разбиение  $\{s_i\}$  отрезка  $[0, 1]$ , что  $\min_i (s_{i+1} - s_i) \geq \delta$  и  $\max_i w_x[s_i, s_{i+1}] \leq w'_x(\delta) + \delta$ . Пусть  $\delta = 1/m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим разбиение  $t_j = j\delta$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Для каждой точки  $s_i \in (0, 1)$  существует единственный промежуток  $[t_{j_i}, t_{j_i+1})$ , ее содержащий. Очевидно,  $t_{j_i+1}$  строго возрастает по  $i$ .

Возьмем в качестве  $\lambda$  кусочно-линейную функцию, отображающую  $t_{j_i+1}$  в  $s_i$  для каждого  $i$ . Ясно, что

$$\sup_{t \in [0, 1]} |\lambda(t) - t| \leq \delta. \quad (1)$$

Пусть  $t \in [t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1})$ , тогда  $\lambda(t) \in [s_i, s_{i+1})$ . Поэтому множество значений функции  $x(\lambda(t))$  при  $t \in [t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1})$  совпадает с множеством  $\{x(s), s \in [s_i, s_{i+1})\}$ . Функция  $x^{(\delta)}(t)$  при  $t \in [t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1})$  принимает значения  $x(t_{j_i+1}), \dots, x(t_{j_{i+1}+1})$ , причем  $t_{j_i+1}, \dots, t_{j_{i+1}+1} \in [s_i, s_{i+1})$ . Поэтому множество значений функции  $x^{(\delta)}(t)$  при  $t \in [t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1})$  вложено в множество  $\{x(s), s \in [s_i, s_{i+1})\}$ . Сказанное означает, что для каждого  $i$

$$\sup_{t \in [t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1})} |x^{(\delta)}(t) - x(\lambda(t))| \leq w_x[s_i, s_{i+1}).$$

Следовательно,

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| x^{(\delta)}(t) - x(\lambda(t)) \right| \leq \max_i w_x[s_i, s_{i+1}] \leq w'_x(\delta) + \delta. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует утверждение леммы.

Пусть  $X$  – случайный процесс с траекториями из  $D[0, 1]$ , тогда  $X$  является случайным элементом со значениями в измеримом пространстве  $D[0, 1]$  с заданной на нем цилиндрической  $\sigma$ -алгеброй. Напомним, что пространство  $D[0, 1]$  является сепарабельным метрическим относительно метрики Скорохода. Обозначим  $\mathcal{B}(D[0, 1])$  борелевскую  $\sigma$ -алгебру относительно метрики Скорохода. Нетрудно доказать, что  $\mathcal{B}(D[0, 1])$  совпадает с цилиндрической  $\sigma$ -алгеброй пространства  $D[0, 1]$ . Таким образом, случайный процесс с траекториями из  $D[0, 1]$  является случайным элементом со значениями в пространстве  $(D[0, 1], \mathcal{B}(D[0, 1]))$  и, значит, мы имеем право использовать теорию сходимости по распределению.

**Теорема 1** (Скореход). *Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  – случайные процессы с траекториями из  $D[0, 1]$ . Если последовательность случайных процессов  $\{X_n\}$  сходится при  $n \rightarrow \infty$  в смысле конечномерных распределений к процессу  $X$  и для любого  $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(w'_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon) = 0, \quad (3)$$

то  $X_n \xrightarrow{D} X$  при  $n \rightarrow \infty$  (в пространстве  $D[0, 1]$ ).

*Доказательство.* Положим  $\delta = 1/m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , и по  $X_n$  построим ступенчатое приближение  $Y_{m,n} = X_n^{(\delta)}$ , а по  $X$  построим  $Y_m = X^{(\delta)}$ .

В силу ранее сказанного

$$\begin{aligned} X_n^{(\delta)} &= g^{(m)}(X_n(0), X_n(1/m), X_n(2/m), \dots, X_n(1)), \\ X^{(\delta)} &= g^{(m)}(X(0), X(1/m), X(2/m), \dots, X(1)), \end{aligned}$$

где  $g^{(m)}$  является непрерывным отображением  $\mathbb{R}^{m+1}$  в  $D[0, 1]$ . По условию теоремы при  $n \rightarrow \infty$

$$(X_n(0), X_n(1/m), \dots, X_n(1)) \xrightarrow{D} (X(0), X(1/m), \dots, X(1)).$$

Поэтому на основании теоремы 1 лекции 4 при  $n \rightarrow \infty$

$$X_n^{(\delta)} \xrightarrow{D} X^{(\delta)},$$

т.е.

$$Y_{m,n} \xrightarrow{D} Y_m. \quad (4)$$

Далее, по лемме 3

$$\rho_{\text{СК}}(X, Y_m) = \rho_{\text{СК}}(X, X^{(\delta)}) \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0,$$

т.е. имеет место сходимость п.н. Но из сходимости п.н. следует сходимость по распределению, т.е. при  $m \rightarrow \infty$

$$Y_m \xrightarrow{D} X. \quad (5)$$

Наконец, ввиду леммы 3

$$\rho_{\text{СК}}(Y_{m,n}; X_n) = \rho_{\text{СК}}(X_n^{(\delta)}, X_n) \leq w'_{X_n}(\delta) + \delta.$$

Поэтому по условию (3) при любом  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\rho_{\text{СК}}(Y_{m,n}; X_n) - \delta \geq \varepsilon) = 0.$$

Следовательно, при любом  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\rho_{\text{СК}}(Y_{m,n}; X_n) \geq \varepsilon) = 0. \quad (6)$$

Из соотношений (4)-(6) по теореме 2 лекции 4 получаем утверждение теоремы 1.

Частое применение находит следующий результат, который будем называть теоремой о *C-сходимости*.

**Теорема 2.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  – случайные процессы с траекториями из  $D[0, 1]$ . Пусть последовательность случайных процессов  $\{X_n\}$  сходится при  $n \rightarrow \infty$  в смысле конечномерных распределений к процессу  $X$  и для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(w_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon) = 0. \quad (7)$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$X_n \xrightarrow{D} X \quad (8)$$

(в пространстве  $D[0, 1]$ ), причем траектории процесса  $X$  п.н. непрерывны.

*Доказательство.* Из соотношения (7) в силу леммы 2 получаем, что для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(w'_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon) = 0.$$

Откуда, вспоминая теорему 1, получаем (8). Доказательство непрерывности траекторий  $X$  предоставляется читателю.

В заключение обсудим требование о сходимости в смысле конечномерных распределений. Рассмотрим отображение  $D[0, 1]$  в  $\mathbb{R}$ :  $x \rightarrow x(t)$ , где  $t$  – фиксированное число из отрезка  $[0, 1]$ . Это отображение измеримо. Оно непрерывно при  $t = 0$  и при  $t = 1$ . При  $t \in (0, 1)$  оно является непрерывным тогда и только тогда, когда функция  $x$  непрерывна в точке  $t$  (докажите сами). Следовательно, это отображение непрерывно при  $t = 0$ , при  $t = 1$  и при всех  $t \in (0, 1)$ , за исключением не более чем счетного множества.

Можно доказать более сильное утверждение. Пусть  $P$  – произвольная вероятностная мера, заданная на  $D[0, 1]$ . Оказывается, множество  $T_P$  таких  $t$ , при которых указанное отображение непрерывно  $P$ -п.н., содержит точки 0 и 1 и его дополнение в  $[0, 1]$  не более чем счетно.

В силу этих свойств множества  $T_P$  для любого  $\delta > 0$  существует такое разбиение  $\{t_i\}$  отрезка  $[0, 1]$ , что  $t_i \in T_P$  и  $t_{i+1} - t_i \leq \delta$  для любого  $i$ . По функции  $x \in D[0, 1]$  будем строить ее ступенчатое приближение  $x^{(\delta)}$ , исходя из этого разбиения. Тогда (см. лемму 3)  $\rho_{\text{СК}}(x, x^{(\delta)}) \leq w'_x(\delta) + \delta$ .

Из сказанного следует, что если  $X, X_1, X_2, \dots$  – случайные процессы с траекториями из  $D[0, 1]$ , то из сходимости  $X_n \xrightarrow{D} X$  при  $n \rightarrow \infty$  (в пространстве  $D[0, 1]$ ) следует сходимость конечномерных распределений, соответствующих точкам  $t_1, t_2, \dots, t_m$  из  $T_{P_X}$ , где  $P_X$  – мера, индуцированная случайным процессом  $X$  в  $(D[0, 1], \mathcal{B}(D[0, 1]))$ . Наоборот, если в условиях теорем 1 и 2 вместо сходимости произвольных конечномерных распределений потребовать сходимость конечномерных распределений, соответствующих точкам  $t_1, t_2, \dots, t_m$  из  $T_{P_X}$ , то  $X_n \xrightarrow{D} X$  при  $n \rightarrow \infty$ .