Лекция 8

Приложения принципа инвариантности Донскера-Прохорова

Из принципа инвариантности Донскера-Прохорова следует, что если $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, то при $n \to \infty$

$$f(Y_n) \xrightarrow{D} f(W), \tag{1}$$

где f – произвольный функционал, заданный на $D[0,1]$ и непрерывный относительно метрики Скорохода. Более того (см. теорему $1'$ лекции 4), если C_f – множество тех элементов $D[0,1]$, в которых функционал f непрерывен относительно метрики Скорохода, то соотношение (1) выполняется, если

$$\mathbf{P}(W \in C_f) = 1. \tag{2}$$

Замечание 1. Донскер доказал именно соотношение (1) и назвал его *принципом инвариантности*, поскольку правая часть соотношения (1) не зависит от распределения X_1. С современной точки зрения вместо названия "принцип инвариантности" лучше использовать название "*функциональная предельная теорема*".

В дальнейшем нас будет интересовать непрерывность тех или иных функционалов f, заданных на пространстве $D[0,1]$ с метрикой Скорохода. При этом полезным окажется следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть функционал $f(x)$, $x \in D[0,1]$, равномерно непрерывен относительно равномерной метрики. Тогда этот функционал непрерывен относительно метрики Скорохода при $x \in C[0,1]$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функционала f относительно равномерной метрики существует такое $\delta_1 > 0$, что из неравенства $\rho_{\text{равн}}(y,z) \le \delta_1$ следует неравенство $|f(y) - f(z)| \le \varepsilon/2$ (здесь $y, z \in D[0,1]$). Зафиксируем $x \in C[0,1]$. По лемме 1 лекции 5 существует такое $\delta_2 > 0$, что $w_x(\delta_2) \le \delta_1$.

Пусть $y \in D[0,1]$ таково, что $\rho_{\text{ск}}(x,y) \le \delta_3$, где $\delta_3 = 2^{-1}\min(\delta_1, \delta_2)$, тогда существует такое строго возрастающее и непрерывное отображение λ отрезка $[0,1]$ на себя, что

$$\sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t| \le 2\delta_3 \le \delta_2, \qquad \sup_{t\in[0,1]} |x(\lambda(t)) - y(t)| \le 2\delta_3 \le \delta_1.$$

Если $\sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t| \le \delta_2$, то

$$\sup_{t\in[0,1]} |x(\lambda(t)) - x(t)| \le w_x(\delta_2) \le \delta_1.$$

Поэтому

$$|f(x) - f(x(\lambda(\cdot)))| \le \varepsilon/2. \tag{3}$$

Если $\sup_{t\in[0,1]}|x(\lambda(t))-y(t)|\le\delta_1$, то $\rho_{\text{равн}}(x(\lambda(\cdot)),y)\le\delta_1$. Поэтому

$$|f(x(\lambda(\cdot)))-f(y)|\le\varepsilon/2. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем, что

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(x(\lambda(\cdot)))|+|f(x(\lambda(\cdot)))-f(y)|\le\varepsilon/2+\varepsilon/2.$$

Лемма доказана.

Нетрудно понять, что равномерно непрерывными относительно метрики равномерной сходимости на $D[0,1]$ являются:

а) *экстремальные функционалы* $f(x)=\sup_{t\in[a,b]}x(t)$, где $0\le a<b\le1$;

б) *интегральные функционалы* $f(x)=\int_a^b x(t)\,dt$, где $0\le a<b\le1$;

в) *проекции* $f(x)=x(a)$, где $a\in[0,1]$.

Рассмотрим примеры применения указанных результатов. Положим

$$M_n=\max_{0\le i\le n}S_i,\qquad M=\sup_{t\in[0,1]}W(t).$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}X_1=0$, $\mathbf{E}X_1^2=\sigma^2$, $0<\sigma^2<+\infty$. *Тогда при всех* $x\ge0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}}\le x\right)=\mathbf{P}(M\le x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}}=\frac{\sup_{t\in[0,1]}S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}=\sup_{t\in[0,1]}Y_n(t). \tag{5}$$

Рассмотрим следующее отображение f пространства $D[0,1]$ в $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\sup_{t\in[0,1]}x(t),\quad x\in D[0,1].$$

Это отображение является равномерно непрерывным в равномерной метрике при всех $x\in D[0,1]$, поскольку при $y\in D[0,1]$

$$\left|\sup_{t\in[0,1]}x(t)-\sup_{t\in[0,1]}y(t)\right|\le\sup_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|=\rho_{\text{равн}}(x,y).$$

По лемме 1 это отображение непрерывно относительно метрики Скорохода при всех $x\in C[0,1]$. В силу сказанного $C_f\supset C[0,1]$ и, поскольку траектории броуновского движения непрерывны, то $\mathbf{P}(W\in C_f)\ge\mathbf{P}(W\in C[0,1])=1$ и, значит, выполнено условие (2). Это означает, что выполнено соотношение (1), т.е. при $n\to\infty$

$$\sup_{t\in[0,1]}Y_n(t)\xrightarrow{D}M.$$

Это, ввиду соотношения (5), означает, что при $n \to \infty$

$$\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} M.$$

В терминах функций распределения получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \mathbf{P}\left(M \leq x\right) \tag{6}$$

при всех $x \in \mathbb{R}$, которые являются точками непрерывности правой части.

Соотношение (6) справедливо для произвольного случайного блуждания, удовлетворяющего условиям теоремы 1, причем правая часть этого соотношения будет одна и та же для различных случайных блужданий. Выберем *простое* случайное блуждание, шаг которого принимает всего два значения 1 и -1 с одной и той же вероятностью $1/2$ (в этом случае $\sigma^2 = 1$). Для простого случайного блуждания справедлив следующий (установленный в общем курсе) результат: при $x \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{7}$$

Поскольку предел в левой части соотношения (6) не зависит от конкретного случайного блуждания, удовлетворяющего условиям теоремы 1, то в силу соотношения (7) он равен правой части соотношения (7). Таким образом,

$$\mathbf{P}\left(M \leq x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

при всех $x \in \mathbb{R}$, которые являются точками непрерывности левой части. Отсюда следует, что эта формула справедлива при всех $x \geq 0$, поскольку ее левая часть (как функция распределения) непрерывна справа при $x \geq 0$, а правая часть непрерывна при $x \geq 0$. Теорема доказана.

Отметим, что по теореме 1 при $x \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(M \geq x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{8}$$

Пусть верхний индекс у символа $\mathbf{P}^{(x)}$ означает, что броуновское движение W стартует из точки x, а не из точки 0. Другими словами, для произвольного борелевского множества A из $C\,[0,1]$

$$\mathbf{P}^{(x)}\left(W \in A\right) = \mathbf{P}\left(x + W \in A\right).$$

Соотношение (8) допускает следующее усиление: при $0 < y < x$

$$\mathbf{P}\left(\ M \geq x,\ \ |W\left(1\right)| \leq y\right) = \mathbf{P}^{(2x)}\left(|W\left(1\right)| \leq y\right). \tag{9}$$

Действительно, если броуновская траектория стартует из точки 0, завершается (при $t = 1$) на отрезке $[-y, y]$ и $M \geq x$, то она достигает состояния

x (пусть впервые это происходит в момент τ_x). Если отразить часть этой траектории до момента τ_x относительно прямой l_x, ординаты точек которой равны x, то получится броуновская траектория, стартующая из точки $2x$ и завершающаяся на $[-y, y]$. Наоборот, если броуновская траектория стартует из точки $2x$ и завершается на $[-y, y]$, то она достигает состояния x (пусть впервые это происходит в момент τ'_x). Если отразить часть этой траектории до момента τ'_x относительно прямой l_x, то получится броуновская траектория, которая стартует из точки 0, завершается на $[-y, y]$ и имеет максимальное значение, не меньшее чем x. Использованное здесь рассуждение получило название *принципа отражения.*

Теорема 2. *При $0 < y < x$ справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |W(t)| \geq x,\ \ |W(1)| \leq y\right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\mathbf{P}^{((4k-2)x)}\left(|W(1)| \leq y\right) - \mathbf{P}^{(4kx)}\left(|W(1)| \leq y\right)\Big).$$

Доказательство. Пусть A_0 – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки 0, достигает состояния x раньше, чем состояния $(-x)$, и завершается на $[-y, y]$.

Применяя принцип отражения броуновской траектории относительно прямой l_x, получаем, что

$$\mathbf{P}(A_0) = \mathbf{P}(A_2),$$

где A_2 – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки $2x$, достигает состояния x раньше, чем состояния $3x$, и завершается на отрезке $[-y, y]$. Ясно, что

$$\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A'_2) - \mathbf{P}(A''_2),$$

где A'_2 – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки $2x$, завершается на $[-y, y]$; A''_2 – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки $2x$, достигает состояния $3x$ раньше, чем состояния x, и завершается на $[-y, y]$.

Далее, применяя принцип отражения броуновской траектории относительно прямой l_{3x}, получаем, что

$$\mathbf{P}(A''_2) = \mathbf{P}(A_4),$$

где A_4 – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки $4x$, достигает состояния $3x$ раньше, чем состояния $5x$, и завершается на $[-y, y]$. Ясно, что

$$\mathbf{P}(A_4) = \mathbf{P}(A'_4) - \mathbf{P}(A''_4),$$

где A'_4 – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки $4x$, завершается на $[-y, y]$; A''_4 – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки $4x$, достигает состояния $5x$ раньше, чем состояния $3x$, и завершается на $[-y, y]$.

Продолжая эти рассуждения, в итоге получаем, что

$$\mathbf{P}(A_0) = \mathbf{P}(A_2') - \mathbf{P}(A_2'') = \mathbf{P}(A_2') - (\mathbf{P}(A_4') - \mathbf{P}(A_4'')) =$$
$$= \mathbf{P}(A_2') - \mathbf{P}(A_4') + (\mathbf{P}(A_6') - \mathbf{P}(A_6'')) =$$
$$= \mathbf{P}(A_2') - \mathbf{P}(A_4') + \mathbf{P}(A_6') - (\mathbf{P}(A_8') - \mathbf{P}(A_8'')) = \ldots =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mathbf{P}^{((4k-2)x)}(|W(1)| \le y) - \mathbf{P}^{(4kx)}(|W(1)| \le y) \Big). \tag{10}$$

Пусть B_0 – случайное событие, состоящее в том, что броуновская траектория, стартующая из точки 0, достигает состояния $(-x)$ раньше, чем состояния x, и завершается на $[-y, y]$. Из соображений симметрии

$$\mathbf{P}(B_0) = \mathbf{P}(A_0). \tag{11}$$

Поскольку

$$\left\{ \sup_{t\in[0,1]} |W(t)| \ge x, \;\; |W(1)| \le y \right\} = A_0 + B_0 \text{ и } A_0 \cap B_0 = \varnothing,$$

то из формул (10) и (11) следует утверждение теоремы.

По случайному блужданию $S_0, S_1, \ldots$, удовлетворяющему условиям теоремы 1, определим случайный процесс, используя линейную интерполяцию:

$$S(t) = S_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor)\left(S_{\lfloor t \rfloor + 1} - S_{\lfloor t \rfloor}\right), \quad t \ge 0.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введем случайный процесс, заданный на отрезке $[0,1]$:

$$\widetilde{Y}_n(t) = \frac{S(nt)}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in [0,1].$$

Траектории этого процесса непрерывны и при $n \to \infty$

$$\widetilde{Y}_n \xrightarrow{D} W, \tag{12}$$

где W – стандартное броуновское движение, а знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $C[0,1]$ с метрикой равномерной сходимости. Соотношение (12) также называется *принципом инвариантности Донскера-Прохорова* и доказывается аналогично.

Следовательно (см. теорему $1'$ лекции 4), при $n \to \infty$

$$f\left(\widetilde{Y}_n\right) \xrightarrow{D} f(W), \tag{13}$$

где f – такой функционал, заданный на $C[0,1]$, что

$$\mathbf{P}(W \in C_f) = 1 \tag{14}$$

(здесь C_f – множество тех элементов $C[0,1]$, в которых функционал f непрерывен относительно метрики равномерной сходимости).

Введем для броуновского движения $\{W(t),\ t \in [0,1]\}$ *момент последнего попадания* в точку 0:

$$\tau = \sup \{t \in [0,1] : W(t) = 0\}.$$

Теорема 3. *При всех* $u \in [0,1]$

$$\mathbf{P}(\tau \leq u) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{u}.$$

Доказательство. Положим для $x \in C[0,1]$ (предполагаем при этом, что $x(0) = 0$)

$$\tau^{(x)} = \sup \{t \in [0,1] : x(t) = 0\}.$$

Рассмотрим следующий функционал на пространстве $C[0,1]$: $f(x) = \tau^{(x)}$, $x \in C[0,1]$. Этот функционал является измеримым, но существуют $x \in C[0,1]$, при которых этот функционал не является непрерывным (например, $x(t) = 0$ при $t \in [0,1/2]$ и $x(t) = t - 1/2$ при $[1/2,1]$).

Однако этот функционал является непрерывным на броуновских траекториях. Чтобы это доказать, установим одно свойство броуновских траекторий. Предположим, что для некоторого фиксированного натурального числа N броуновская траектория $W(t)$, $t \in [0,1]$, расположена по одну сторону от точки 0 как на промежутке $[\tau - 1/N, \tau]$, так и на промежутке $[\tau, 1]$ (отметим, что $\tau < 1$ п.н.). Тогда для некоторого $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ одна из двух величин $\inf_{t \in [k/N,1]} W(t)$ или $\sup_{[k/N,1]} W(t)$ равна 0. Вероятность последнего события равна 0. Это объясняется тем, что распределения случайных величин $\inf_{t \in [k/N,1]} W(t)$ и $\sup_{t \in [k/N,1]} W(t)$ являются абсолютно непрерывными (см. теорему 1). Таким образом, для почти каждой броуновской траектории $W(t)$, $t \in [0,1]$, выполняется свойство: для каждого достаточно большого натурального числа N существует такое число $t^{(N)} \in [\tau - 1/N, \tau]$, что

$$W\left(t^{(N)}\right) W(\tau + 1/N) < 0.$$

Покажем теперь, что если $x \in C[0,1]$ и для каждого достаточно большого натурального числа N ($N \geq K$, где $K \in \mathbb{N}$) существует такое число $t^{(N)} \in \left[\tau^{(x)} - 1/N, \tau^{(x)}\right]$, что

$$x\left(t^{(N)}\right) x\left(\tau^{(x)} + 1/N\right) < 0,$$

то отображение f является непрерывным в точке x. Для произвольного натурального числа $N \geq K$ подберем положительное δ так, чтобы $\delta < \left|x\left(t^{(N)}\right)\right|$ и $\delta < \inf_{t \geq \tau^{(x)} + 1/N} |x(t)|$. Если $y \in C[0,1]$ и $\rho_{\text{равн}}(x,y) \leq \delta$, то $y\left(t^{(N)}\right)$ имеет тот же знак, что и $x\left(t^{(N)}\right)$, а $y\left(\tau^{(x)} + 1/N\right)$ имеет тот же знак, что и $x\left(\tau^{(x)} + 1/N\right)$. Поэтому

$$y\left(t^{(N)}\right) y\left(\tau^{(x)} + 1/N\right) < 0.$$

Кроме того, $\inf_{t \geq \tau^{(x)} + 1/N} |y(t)| > 0$. Итак, $\tau^{(y)} \in \left[t^{(N)}, \tau^{(x)} + 1/N\right]$ и, следовательно, $\left|\tau^{(y)} - \tau^{(x)}\right| \leq 1/N$. Требуемое утверждение доказано.

Итак, условие (14) выполнено и, следовательно, выполнено соотношение (13), т.е. при $n \to \infty$

$$\tau^{(\widetilde{Y}_n)} \xrightarrow{D} \tau.$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно показать, что при $0 < a < b < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(a < \tau^{(\widetilde{Y}_n)} \leq b\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}|_a^b, \tag{15}$$

причем (15) достаточно установить в каком-либо частном случае.

Пусть теперь $\{S_i,\ i \in \mathbb{N}_0\}$ – простое случайное блуждание и

$$\tau(n) = \max\{i \leq n : S_i = 0\}.$$

Очевидно, $\tau^{(\widetilde{Y}_n)} = \tau(n)/n$, поэтому соотношение (15) принимает следующий вид: при $0 < a < b < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(a < \frac{\tau(2n)}{2n} \leq b\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}|_a^b. \tag{16}$$

Положим

$$u_{2n} = \mathbf{P}\,(\ S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{17}$$

Оказывается (докажите самостоятельно), что

$$\mathbf{P}\,(S_1 \neq 0,\ S_2 \neq 0, \ldots,\ S_{2n} \neq 0) = u_{2n}. \tag{18}$$

Вспоминая, что $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ при $n \to \infty$ (формула Стирлинга) находим, что

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \tag{19}$$

По марковскому свойству случайного блуждания при $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\mathbf{P}\,(\tau\,(2n) = 2k) = \mathbf{P}\,(S_{2k} = 0,\ S_{2k+1} \neq 0, \ldots,\ S_{2n} \neq 0) =$$
$$= \mathbf{P}\,(S_{2k} = 0,\ S_{2k+1} - S_{2k} \neq 0, \ldots,\ S_{2n} - S_{2k} \neq 0) =$$
$$= \mathbf{P}\,(S_{2k} = 0)\,\mathbf{P}\,(S_{2k+1} - S_{2k} \neq 0, \ldots,\ S_{2n} - S_{2k} \neq 0) =$$
$$= \mathbf{P}\,(S_{2k} = 0)\,\mathbf{P}\,(S_1 \neq 0, \ldots,\ S_{2n-2k} \neq 0).$$

Откуда, вспоминая (17) и (19), находим, что при $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\mathbf{P}\,(\tau\,(2n) = 2k) = u_{2k} u_{2n-2k}. \tag{20}$$

Ввиду (20)

$$\mathbf{P}\left(a < \frac{\tau\,(2n)}{2n} \leq b\right) = \sum_{a<k/n\leq b} \mathbf{P}\,(\tau\,(2n) = 2k) = \sum_{a<k/n\leq b} u_{2k} u_{2n-2k}. \tag{21}$$

Ввиду (19) для произвольного $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n

$$\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\pi k}} \leq u_{2k} \leq \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\pi k}}, \qquad \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\pi\,(n-k)}} \leq u_{2n-2k} \leq \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\pi\,(n-k)}},$$

если $a < k/n \le b$. Поэтому

$$\sum_{a<\frac{k}{n}\le b} \frac{(1-\varepsilon)^2}{\pi\sqrt{k(n-k)}} \le \sum_{a<\frac{k}{n}\le b} u_{2k}u_{2n-2k} \le \sum_{a<\frac{k}{n}\le b} \frac{(1+\varepsilon)^2}{\pi\sqrt{k(n-k)}}. \tag{22}$$

Но

$$\sum_{a<k/n\le b} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = \sum_{a<k/n\le b} \frac{1}{\sqrt{(k/n)(1-(k/n))}}\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} \int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},$$

поскольку вторая сумма является интегральной суммой для последнего интеграла. Переходя в (22) к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\arcsin\sqrt{x}\big|_a^b,$$

получаем, что

$$(1-\varepsilon)^2\,\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\big|_a^b \le \liminf_{n\to\infty} \sum_{a<k/n\le b} u_{2k}u_{2n-2k} \le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \sum_{a<k/n\le b} u_{2k}u_{2n-2k} \le (1+\varepsilon)^2\,\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\big|_a^b.$$

Откуда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{a<k/n\le b} u_{2k}u_{2n-2k} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\big|_a^b. \tag{23}$$

Из (21) и (23) следует требуемое соотношение (16). Теорема доказана.