

Экзаменационные вопросы. 2023-24 у.г.

1. Понятие случайного элемента и его распределение. Случайные величины и векторы как случайные элементы.
2. Цилиндрическая σ -алгебра на пространстве числовых последовательностей и функций. Случайные последовательности и случайные процессы как случайные элементы. Эквивалентные определения.
3. Распределение случайного процесса. Восстановление распределения случайного процесса по его конечномерным распределениям.
4. Условия согласованности конечномерных распределений, в том числе в терминах случайных векторов. Теорема Колмогорова о существовании процесса.
5. Эквивалентные случайные процессы. Несовпадение вероятностей некоторых событий, касающихся эквивалентных процессов.
6. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации.
7. Броуновское движение и его существование.
8. Определение слабой сходимости вероятностных мер. Теорема Александра: критерий в терминах открытых и замкнутых множеств.
9. Теорема Александра: критерий в терминах множеств, граница которых имеет нулевую меру.
10. Сходимость случайных элементов по распределению. Переформулировка теоремы Александра. Условия сходимости по распределению последовательности случайных величин (в терминах функций распределения).
11. Сходимость случайных элементов по распределению и отображения.
12. Теорема о двупараметрической последовательности случайных элементов.
13. Аналог теоремы о двупараметрической последовательности в терминах математических ожиданий.
14. Теорема непрерывности для характеристических функций.
15. Теорема Прохорова о сходимости по распределению случайных процессов с непрерывными траекториями.
16. Теорема Прохорова в терминах сходимости по распределению двух функционалов специального вида от случайных процессов с непрерывными траекториями.
17. Достаточные условия (в терминах моментов приращений) сходимости по распределению случайных процессов с непрерывными траекториями (разобрать самостоятельно).
18. Пространство функций без разрывов второго рода. Метрика Скорохода. Модуль непрерывности w' и его свойства.
19. Оценка сверху для расстояния по Скороходу между функцией и ее приближением.
20. Теорема Скорохода о сходимости по распределению случайных процессов с траекториями без разрывов второго рода.
21. Случайное блуждание. Марковское свойство. Неравенство Колмогорова.
22. Принцип инвариантности Донскера-Прохорова: сходимость конечномерных распределений.

23. Принцип инвариантности Донскера-Прохорова: условие на модуль непрерывности.
24. Предельная теорема для максимума случайного блуждания с нулевым сносом.
25. Совместное распределение максимума модуля броуновского движения на отрезке $[0, 1]$ и модуля его сечения в точке 1.
26. Закон арксинуса для броуновского движения.
27. Определение и существование броуновского моста. Броуновский мост как условное броуновское движение.
28. Броуновский мост – неоднородный марковский процесс.
29. Распределение максимума модуля броуновского моста. Распределение Колмогорова.
30. Локальная теорема Стоуна и следствия из нее.
31. Лемма о сходящейся по распределению последовательности случайных величин и сходящейся последовательности функций.
32. Принцип инвариантности Лиггетта: сходимости конечномерных распределений.
33. Принцип инвариантности Лиггетта: условие на модуль непрерывности.
34. Выборочная функция распределения и ее сходимости. Статистика Колмогорова: сходимости почти наверное, инвариантность ее распределения относительно исходного распределения.
35. Две леммы о полиномиальном распределении.
36. Функциональная предельная теорема о сходимости эмпирического процесса к броуновскому мосту.
37. Фундаментальная теорема математической статистики.