Лекция 10

Условная функциональная предельная теорема Лиггетта

Прежде, чем говорить об основной цели лекции, дадим некоторые общие определения, касающиеся дискретных распределений.

Определение 1. Распределение случайной величины X называется (h, a)-*решетчатым*, если оно является дискретным и существуют такие числа $h > 0$ и $a \in [0, h)$, что возможные значения X принадлежат множеству $\{a + hm,\ m \in \mathbb{Z}\}$. Величина a называется *сносом распределения*, а величина h называется *шагом распределения.* Распределения, не являющиеся решетчатыми, называются *нерешетчатыми.*

Отметим, что у одного решетчатого распределения может быть несколько наборов (h, a), при этом для каждого возможного h величина a находится однозначно.

Пример 1. Пусть $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = 1/2$, тогда распределение случайной величины X является $(2, 1)$-решетчатым и $(1, 0)$-решетчатым.

Определение 2. Максимальное из возможных значений h решетчатого распределения называется *максимальным шагом распределения.*

В примере 1 максимальный шаг распределения равен 2.

Определение 3. Если у решетчатого распределения максимальный шаг равен h и при этом $a = 0$, то это распределение называется *центрально решетчатым.*

Пусть $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – случайное блуждание с шагами $X_1, X_2, \ldots$, причем $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Положим, как и раньше, при $n \in \mathbb{N}$

$$Y_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}},\ t \in [0, 1].$$

Следующий результат получил название *условной функциональной предельной теоремы Лиггетта.*

Теорема 1. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные центрально решетчатые или нерешетчатые случайные величины,* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда для произвольных фиксированных $a < 0$ и $b \geq 0$ при $n \to \infty$*

$$\{Y_n(t),\ t \in [0, 1]\ |\ S_n \in (a, b]\} \xrightarrow{D} W_0,$$

где W_0 – броуновский мост, знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$.

Доказательство теоремы 1 разобьем на ряд лемм. Будем считать, что в решетчатом случае максимальный шаг распределения X_1 равен h и a, b кратны h. Следующий результат известен как теорема Стоуна.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1 *для произвольных* $x \in \mathbb{R}$ и $\Delta > 0$ (*в решетчатом случае* Δ *кратно* h) *при* $n \to \infty$

$$\sigma\sqrt{n}\mathbf{P}\left(S_n \in \left(\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta\right]\right) = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + o(1)\right);$$

это соотношение выполняется равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

Лемма, по сути, означает, что при больших n распределение случайной величины $S_n / \left(\sigma\sqrt{n}\right)$ мало отличается от стандартного нормального, а именно

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(x, x + \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \approx p\left(x\right) \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}},$$

где $p\left(x\right)$ – плотность распределения $N\left(0,1\right)$. Отметим, что утверждение леммы сохранится, если промежуток $(\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta]$ заменить на промежуток $(\sigma\sqrt{n}x - \Delta, \sigma\sqrt{n}x]$.

Лемма 2. *В условиях теоремы* 1 *при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(S_n \in (a,b]\right) \sim \frac{b-a}{\sqrt{2\pi n}\sigma}$$

и, следовательно, $\mathbf{P}\left(S_n \in (a,b]\right) \neq 0$ *при достаточно больших* n.

Доказательство. В силу леммы 1 для произвольного $x \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$

$$\sigma\sqrt{n}\mathbf{P}\left(S_n \in \left(\sigma\sqrt{n}x + a, \sigma\sqrt{n}x + b\right]\right) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \ o\left(1\right)\right).$$

При $x = 0$ получаем утверждение леммы.

Пусть верхний индекс у $\mathbf{P}^{(x)}$ означает, что случайное блуждание $\{S_n\}$ стартует из точки x, а не из точки 0.

Лемма 3. *В условиях теоремы* 1 *для произвольных* $x \in \mathbb{R}$ *и* $t \in (0,1)$ *при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}x\right)}\left(S_{n-\lfloor nt \rfloor} \in (a,b]\right) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi\left(1-t\right)n}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}} \left(1 + \ o(1)\right); \qquad (1)$$

это соотношение выполняется равномерно по x, *принадлежащим произвольному конечному отрезку. Кроме того, существует такая постоянная* $K > 0$, *что при всех* $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}x\right)}\left(S_{n-\lfloor nt \rfloor} \in (a,b]\right) \leq \frac{K}{\sqrt{n}}. \qquad (2)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}x\right)}\left(S_{n-\lfloor nt \rfloor} \in (a,b]\right) = \mathbf{P}\left(S_{n-\lfloor nt \rfloor} \in \left(-\sigma\sqrt{n}x + a, -\sigma\sqrt{n}x + b\right]\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(S_{n-\lfloor nt \rfloor} \in \left(-\sigma\sqrt{n - \lfloor nt \rfloor}x_n + a, -\sigma\sqrt{n - \lfloor nt \rfloor}x_n + b\right]\right),$$

где $x_n = x\sqrt{n/(n-\lfloor nt \rfloor)}$. Следовательно, в силу леммы 1 при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{n}x)}\left(S_{n-\lfloor nt \rfloor} \in (a,b]\right) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{n-\lfloor nt \rfloor}} e^{-\frac{1}{2}x_n^2}\left(1 + \ o(1)\right) \qquad (3)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Поскольку правая часть соотношения (3) не превосходит $K/\sqrt{n}$ при всех $x \in \mathbb{R}$ (здесь $K > 0$ – некоторая постоянная), то получаем соотношение (2). Далее,

$$\frac{1}{\sqrt{n(1-t)}} - \frac{1}{\sqrt{n-\lfloor nt \rfloor}} = \frac{1}{\sqrt{n(1-t)}}\left(1 - \sqrt{\frac{n(1-t)}{n-\lfloor nt \rfloor}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n(1-t)}}\right),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}} - e^{-\frac{1}{2}x_n^2} = e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}\delta_n(t)}\right),$$

где $\delta_n(t) = \frac{n}{n-\lfloor nt \rfloor} - \frac{1}{1-t}$. При этом $x^2|\delta_n(t)| = o(1/n)$ равномерно по x, принадлежащим произвольному конечному отрезку, поэтому правую часть соотношения (3) можно привести к виду, указанному в правой части соотношения (1). Это означает справедливость соотношения (1). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – случайные величины, заданные на вероятностных пространствах с мерами $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$, и $\xi_n \overset{D}{\to} \xi$ при $n \to \infty$. Пусть $\{f_n\}$ – последовательность равномерно ограниченных измеримых числовых функций на $\mathbb{R}$ и $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ равномерно по x, принадлежащим произвольному отрезку, причем $f(x)$ – непрерывная функция. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_n\left(f_n(\xi_n);\ \xi_n \in B\right) = \mathbf{E}\left(f(\xi);\ \xi \in B\right)$$

для каждого такого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$, что $\mathbf{P}(\xi \in \partial B) = 0$.

Доказательство. Пусть $|f_n(x)| \le K$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, тогда для произвольного $u > 0$

$$\mathbf{E}_n\left(|f_n(\xi_n)|;\ |\xi_n| \ge u\right) \le K\mathbf{P}_n\left(|\xi_n| \ge u\right).$$

Поскольку $\xi_n \overset{D}{\to} \xi$ при $n \to \infty$, то $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(|\xi_n| \ge u) \le \mathbf{P}(|\xi| \ge u)$ и, следовательно,

$$\lim_{u\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}_n\left(|f_n(\xi_n)|;\ |\xi_n| \ge u\right) = 0.$$

Поэтому ограничимся случаем, когда $B \in [-u, u]$ при некотором $u > 0$. Ясно, что

$$\left|\mathbf{E}_n\left(f_n(\xi_n);\ \xi_n \in B\right) - \mathbf{E}\left(f(\xi);\ \xi \in B\right)\right| \le$$

$$\le \mathbf{E}_n\left(|f_n(\xi_n) - f(\xi_n)|;\ \xi_n \in B\right) + \left|\mathbf{E}_n\left(f(\xi_n);\ \xi_n \in B\right) - \mathbf{E}\left(f(\xi);\ \xi \in B\right)\right|.$$

Заметим, что

$$\mathbf{E}_n\left(|f_n(\xi_n) - f(\xi_n)|;\ \xi_n \in B\right) \le \sup_{x\in[-u,u]} |f_n(x) - f(x)|$$

и, значит,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}_n\left(|f_n(\xi_n) - f(\xi_n)|;\ \xi_n \in B\right) = 0.$$

Далее, $\mathbf{E}_n\left(f\left(\xi_n\right);\ \xi_n \in B\right) = \mathbf{E}_n g\left(\xi_n\right)$, где $g\left(x\right) = f\left(x\right) I_B\left(x\right)$ при $x \in \mathbb{R}$ (здесь $I_B\left(\cdot\right)$ – индикатор множества B). Функция $g\left(\cdot\right)$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}\backslash\partial B$, причем по условию леммы $\mathbf{P}\left(\xi \in \mathbb{R}\backslash\partial B\right) = 1$. По теореме $1'$ лекции 4 $g\left(\xi_n\right) \overset{D}{\to} g\left(\xi\right)$ при $n \to \infty$ и, следовательно, по теореме о мажорируемой сходимости $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_n g\left(\xi_n\right) = \mathbf{E} g\left(\xi\right)$. Это означает, что $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_n\left(f\left(\xi_n\right);\ \xi_n \in B\right) = \mathbf{E}\left(f\left(\xi\right);\ \xi \in B\right)$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \left|\mathbf{E}_n\left(f\left(\xi_n\right);\ \xi_n \in B\right) - \mathbf{E}\left(f\left(\xi\right);\ \xi \in B\right)\right| = 0.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть F_n – функция распределения случайной величины ξ_n, а F – функция распределения случайной величины ξ. Тогда утверждение леммы 4 можно записать в следующем виде:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_B f_n\left(x\right) dF_n\left(x\right) = \int\limits_B f\left(x\right) dF\left(x\right).$$

Лемма 5. *Последовательность случайных процессов*

$$\left\{Y_n\left(t\right),\ t \in [0,1]\ \mid S_n \in (a,b]\right\}$$

сходится при $n \to \infty$ в смысле конечномерных распределений к процессу $\left\{W_0\left(t\right),\ t \in [0,1]\right\}$.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 1$. Рассмотрим при фиксированных $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(Y_n\left(t_k\right) \le a_k,\ k \in I_m \mid S_n \in (a,b]\right) =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}\left(S_n \in (a,b]\right)} \mathbf{P}\left(Y_n\left(t_k\right) \le a_k,\ k \in I_m;\ S_n \in (a,b]\right).$$

В силу марковского свойства случайного блуждания правая часть равна

$$\int\limits_{-\infty}^{a_m} d_x \mathbf{P}\left(Y_n\left(t_k\right) \le a_k,\ k \in I_{m-1};\ Y_n\left(t_m\right) \le x\right) \frac{\mathbf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}x\right)}\left(S_{n-\lfloor nt_m\rfloor} \in (a,b]\right)}{\mathbf{P}\left(S_n \in (a,b]\right)} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{a_m} f_n\left(x\right) dF_n\left(x\right),$$

где

$$f_n\left(x\right) = \mathbf{P}\left(Y_n\left(t_k\right) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right) \frac{\mathbf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}x\right)}\left(S_{n-\lfloor nt_m\rfloor} \in (a,b]\right)}{\mathbf{P}\left(S_n \in (a,b]\right)},$$

$$F_n\left(x\right) = \mathbf{P}\left(Y_n\left(t_m\right) \le x \mid Y_n\left(t_k\right) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right).$$

Итак,

$$\mathbf{P}\left(Y_n\left(t_k\right) \le a_k,\ k \in I_m \mid S_n \in (a,b]\right) = \int\limits_{-\infty}^{a_m} f_n\left(x\right) dF_n\left(x\right). \tag{4}$$

Воспользуемся леммой 4 (см. также замечание 1). По принципу инвариантности Донскера-Прохорова

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}\left(Y_n(t_m) \le x,\ Y_n(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right)}{\mathbf{P}\left(Y_n(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right)} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}\left(W(t_m) \le x,\ W(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right)}{\mathbf{P}\left(W(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right)} =$$

$$= \mathbf{P}\left(W(t_m) \le x \mid W(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right). \tag{5}$$

Ввиду лемм 2 и 3 последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно ограничена на $\mathbb{R}$ и

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}} \mathbf{P}\left(W(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right) \tag{6}$$

равномерно по x, принадлежащим произвольному отрезку. Из соотношений (4)-(6) по лемме 4 получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(Y_n(t_k) \le a_k,\ k \in I_m \mid S_n \in (a,b]\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{a_m} \frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}} \mathbf{P}\left(W(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right) \times$$

$$\times d_x \mathbf{P}\left(W(t_m) \le x \mid W(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{a_m} \frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}} d_x \mathbf{P}\left(W(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1};\ W(t_m) \le x\right). \tag{7}$$

Вспомним, что броуновское движение W является марковским процессом с переходной плотностью

$$p(s,x;t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}},\ 0 \le s < t,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, во-первых,

$$\mathbf{P}\left(W(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1};\ W(t_m) \le x\right) =$$

$$= \int\limits_{G_{m-1}(a_1,\ldots,a_{m-1}) \times (-\infty,x]} \!\!\!\cdots\!\!\! \int \prod_{k=1}^{m} p(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k)\, dx_1 \ldots dx_m = \int\limits_{-\infty}^{x} g(x_m)\, dx_m,$$

где $x_0 = 0$ и

$$g(x_m) = \int\limits_{G_{m-1}(a_1,\ldots,a_{m-1})} \!\!\!\cdots\!\!\! \int \prod_{k=1}^{m} p(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k)\, dx_1 \ldots dx_{m-1};$$

и, во-вторых,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}} = \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0,0;1,0)}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{a_m} \frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}} d_x \mathbf{P}\left(W\left(t_k\right) \le a_k,\ k \in I_{m-1};\ W\left(t_m\right) \le x\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{a_m} \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0,0;1,0)} g\left(x\right) dx =$$

$$= \int\limits_{G_{m-1}(a_1,\ldots,a_{m-1})\times(-\infty,a_m]} \cdots \int \prod_{k=1}^{m} p\left(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k\right) \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0,0;1,0)} dx_1 \ldots dx_m =$$

$$= \int\limits_{G_m(a_1,\ldots,a_m)} \cdots \int \prod_{k=1}^{m} p\left(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k\right) \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0,0;1,0)} dx_1 \ldots dx_m. \tag{8}$$

Известно (см. соотношение (10) лекции 9), что в последнем интеграле подынтегральное выражение совпадает с $\prod_{k=0}^{m-1} p_0(t_k, x_k; t_{k+1}, x_{k+1})$, поэтому

$$\int\limits_{G_m(a_1,\ldots,a_m)} \cdots \int \prod_{k=1}^{m} p\left(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k\right) \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0,0;1,0)} dx_1 \ldots dx_m =$$

$$= \int\limits_{G_m(a_1,\ldots,a_m)} \cdots \int \prod_{k=0}^{m-1} p_0(t_k, x_k; t_{k+1}, x_{k+1}) dx_1 \ldots dx_m =$$

$$= \mathbf{P}\left(W_0\left(t_k\right) \le a_k,\ k \in I_m\right). \tag{9}$$

Из соотношений (7)-(9) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(Y_n\left(t_k\right) \le a_k,\ k \in I_m \mid S_n \in (a,b]\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(W_0\left(t_k\right) \le a_k,\ k \in I_m\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta\right) \ge \varepsilon \mid S_n \in (a,b]\right) = 0.$$

Доказательство. Положим для $x \in D\left[c,d\right]$ при $-\infty < c \le d < +\infty$

$$w_x\left(\delta; c, d\right) = \sup_{\substack{t,s:\ |t-s|\le\delta,\\ t,s\in[c,d]}} \left|x\left(t\right) - x\left(s\right)\right|,$$

где δ - положительное число. Очевидно, что при достаточно малых $\delta > 0$

$$w_x\left(\delta\right) = w_x\left(\delta; 0, 1\right) \le w_x\left(\delta; 0, 2/3\right) + w_x\left(\delta; 1/2, 1\right). \tag{10}$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta; 0, 2/3\right) \ge \varepsilon \mid S_n \in (a,b]\right) = 0. \tag{11}$$

В силу марковского свойства случайного блуждания

$$\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta;0,2/3)\geq\varepsilon\mid S_n\in(a,b]\right)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d_x\mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta;0,2/3)\geq\varepsilon,\ Y_n(2/3)\leq x)\frac{\mathbf{P}^{\left(x\sigma\sqrt{n}\right)}\left(S_{n-\lfloor 2n/3\rfloor}\in(a,b]\right)}{\mathbf{P}\left(S_n\in(a,b]\right)}. \tag{12}$$

По лемме 3

$$\mathbf{P}^{\left(x\sigma\sqrt{n}\right)}\left(S_{n-\lfloor 2n/3\rfloor}\in(a,b]\right)\leq\frac{K}{\sqrt{n}} \tag{13}$$

при всех $x\in\mathbb{R}$. Из соотношения (13) и леммы 2 следует, что при достаточно больших n и всех $x\in\mathbb{R}$

$$\frac{\mathbf{P}^{\left(x\sigma\sqrt{n}\right)}\left(S_{n-\lfloor 2n/3\rfloor}\in(a,b]\right)}{\mathbf{P}\left(S_n\in(a,b]\right)}\leq L \tag{14}$$

где $L>0$ – постоянная. Применяя (14) к соотношению (12), находим, что

$$\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta;0,2/3)\geq\varepsilon\mid S_n\in(a,b]\right)\leq L\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta;0,2/3)\geq\varepsilon\right). \tag{15}$$

По принципу инвариантности Донскера-Прохорова

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta;0,2/3)\geq\varepsilon\right)=0. \tag{16}$$

Из соотношений (15) и (16) следует (11).

Покажем теперь, что

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta;1/2,1)\geq\varepsilon\mid\ S_n\in(a,b]\right)=0. \tag{17}$$

Положим $\widetilde{S}_0=0$, $\widetilde{S}_1=S_n-S_{n-1}$, $\widetilde{S}_2=S_n-S_{n-2}$, $\ldots$, $\widetilde{S}_n=S_n-S_0=S_n$. Заметим, что

$$(S_1,\ldots,S_n)\stackrel{d}{=}\left(\widetilde{S}_1,\ldots,\widetilde{S}_n\right).$$

Условие $\{S_n\in(a,b]\}$ означает, что $\left\{\widetilde{S}_n\in(a,b]\right\}$. Для каждого $n\in\mathbb{R}$ введем случайный процесс $\widetilde{Y}_n(t)=\widetilde{S}_{\lfloor nt\rfloor}/(\sigma\sqrt{n})$, $t\in[0,1]$. В силу (11)

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(w_{\widetilde{Y}_n}(\delta;0,2/3)\geq\varepsilon\ \middle|\ \widetilde{S}_n\in(a,b]\right)=0. \tag{18}$$

Если $(s,t)\in[1/2,1]$ и $|t-s|\leq\delta$, то при достаточно больших n

$$|Y_n(t)-Y_n(s)|=\frac{\left|S_{\lfloor nt\rfloor}-S_{\lfloor ns\rfloor}\right|}{\sigma\sqrt{n}}=\frac{\left|\widetilde{S}_{n-\lfloor ns\rfloor}-\widetilde{S}_{n-\lfloor nt\rfloor}\right|}{\sigma\sqrt{n}}\leq w_{\widetilde{Y}_n}(2\delta;0,2/3).$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta;1/2,1)\geq\varepsilon\mid\ S_n\in(a,b]\right)\leq\mathbf{P}\left(w_{\widetilde{Y}_n}(2\delta;0,2/3)\geq\varepsilon\ \middle|\ \widetilde{S}_n\in(a,b]\right).$$

Откуда, ввиду соотношения (18), следует (17).

Из соотношений (10), (11) и (17) вытекает утверждение леммы.

Ввиду лемм 5 и 6 по теореме о C-сходимости получаем утверждение теоремы 1.