

Лекция 9

Броуновский мост

Наряду с принципом инвариантности Донскера–Прохорова существуют и другие функциональные предельные теоремы для случайных блужданий, в которых последние рассматриваются при некоторых условиях, касающихся их траекторий. Такие случайные блуждания и соответствующие им теоремы получили название *условных*. Мы изучим одну из таких условных функциональных предельных теорем, но сначала познакомимся со случайным процессом, играющим роль предельного процесса в этой теореме.

Определение 1. Случайный процесс $\{W_0(t), t \in [0, 1]\}$ называется *броуновским мостом*, если

- 1) $W_0(0) = 0$ п.н.;
- 2) все конечномерные распределения нормальны;
- 3) $\mathbf{E}W_0(t) = 0$, $\mathbf{E}W_0(s)W_0(t) = s(1-t)$ при $0 \leq s \leq t \leq 1$;
- 4) траектории W_0 п.н. непрерывны.

Заметим, что $W_0(1) = 0$ п.н. В качестве примера броуновского моста можно рассмотреть процесс $\{W(t) - tW(1), t \in [0, 1]\}$, где $\{W(t), t \geq 0\}$ – броуновское движение. Условия 1), 2) и 4) выполняются. Далее, при $0 \leq s \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(W(t) - tW(1)) &= 0, \\ \mathbf{E}(W(s) - sW(1))(W(t) - tW(1)) &= \\ &= \mathbf{E}W(s)W(t) - t\mathbf{E}W(s)W(1) - s\mathbf{E}W(1)W(t) + st\mathbf{E}W^2(1) = s(1-t). \end{aligned}$$

Как и в случае броуновского движения, будем считать, что все траектории броуновского моста являются непрерывными.

Пусть X – случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Пусть $A \in \mathcal{F}$ и $\mathbf{P}(A) > 0$. Обозначим $\{X | A\}$ случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(A, \mathcal{F} \cap A, \mathbf{P}(\cdot | A))$, где $\mathbf{P}(\cdot | A)$ – условная вероятностная мера ($\mathbf{P}(B | A) = \mathbf{P}(AB) / \mathbf{P}(A)$ при $B \in \mathcal{F} \cap A$) и определяемый формулой

$$\{X | A\}(\omega) = X(\omega), \quad \omega \in A.$$

Положим при $\varepsilon > 0$

$$W_\varepsilon = \{W | |W(1)| \leq \varepsilon\}.$$

Теорема 1. При $\varepsilon \rightarrow 0$

$$W_\varepsilon \xrightarrow{D} W_0,$$

где знак \xrightarrow{D} означает сходимость по распределению в $C[0, 1]$.

Доказательство. Возьмем в качестве W_0 процесс $\{W(t) - tW(1), t \in [0, 1]\}$. Покажем, что этот процесс не зависит от случайной величины $W(1)$.

Сначала покажем, что для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и произвольных моментов времени $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$ вектор $\{W_0(t_1), W_0(t_2), \dots, W_0(t_m)\}$ не зависит от величины $W(1)$. Действительно, рассмотрим случайный вектор $\{W_0(t_1), \dots, W_0(t_m), W(1)\}$. Он имеет нормальное распределение. Поэтому независимость $W(1)$ от остальных компонент равносильна равенствам

$$\text{cov}(W(1), W_0(t_k)) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Проверим их:

$$\begin{aligned} \text{cov}(W(1), W_0(t_k)) &= \text{cov}(W(1), W(t_k) - t_k W(1)) = \\ &= \mathbf{E}W(1)W(t_k) - t_k \mathbf{E}W^2(1) = 0. \end{aligned}$$

Из доказанного следует (установите это сами), что случайная величина $W(1)$ не зависит от случайного события $\{W_0 \in A\}$ для любого множества A из цилиндрической σ -алгебры в пространстве $C[0, 1]$. Вспомним, что эта σ -алгебра совпадает с борелевской σ -алгеброй в $C[0, 1]$ относительно равномерной топологии. Следовательно, случайная величина $W(1)$ не зависит от случайного события $\{W_0 \in A\}$ для любого борелевского множества A пространства $C[0, 1]$. Итак, требуемое утверждение доказано.

В силу доказанного для любого борелевского множества A из $C[0, 1]$

$$\mathbf{P}(W_0 \in A \mid |W(1)| \leq \varepsilon) = \mathbf{P}(W_0 \in A). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь произвольное замкнутое множество F из $C[0, 1]$. Покажем, что

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(W \in F \mid |W(1)| \leq \varepsilon) \leq \mathbf{P}(W_0 \in F). \quad (2)$$

Если $|W(1)| \leq \varepsilon$ и $W \in F$, то $W_0 \in F_\varepsilon = \{x : \rho_{\text{равн}}(x, F) \leq \varepsilon\}$. Откуда с учетом (1) получаем, что

$$\mathbf{P}(W \in F \mid |W(1)| \leq \varepsilon) \leq \mathbf{P}(W_0 \in F_\varepsilon \mid |W(1)| \leq \varepsilon) = \mathbf{P}(W_0 \in F_\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(W \in F \mid |W(1)| \leq \varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(W_0 \in F_\varepsilon) = \mathbf{P}(W_0 \in F).$$

Последнее равенство объясняется тем, что множества F_ε убывают с уменьшением ε и $\bigcap_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon = F$. Итак, соотношение (2) доказано. Из соотношения (2) по теореме Александрова следует утверждение теоремы.

В дальнейшем нам потребуется понятие марковского процесса. Положим $I_m = \{1, \dots, m\}$.

Определение 2. Неотрицательная числовая функция $p(s, x; t, y)$, где *временные* переменные s, t неотрицательны, причем $s < t$, и *пространственные* переменные x, y принадлежат \mathbb{R} , называется *переходной плотностью*, если эта функция измерима по паре пространственных переменных и

1) для произвольных s, t и x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x; t, y) dy = 1,$$

2) для произвольных s, u, t ($0 \leq s < u < t$) и x, y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x; u, z) p(u, z; t, y) dz = p(s, x; t, y).$$

Определение 3. Случайный процесс $\{X(t), t \geq 0\}$, стартовый из состояния $x_0 \in \mathbb{R}$, называется *марковским процессом с переходной плотностью* $p(s, x; t, y)$, если для произвольного $m \in \mathbb{N}$, произвольных моментов времени $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < +\infty$ и произвольных $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X(t_k) \leq a_k, k \in I_m) = \\ & = \int_{G_m(a_1, \dots, a_m)} \dots \int p(0, x_0; t_1, x_1) p(t_1, x_1; t_2, x_2) \dots p(t_{m-1}, x_{m-1}; t_m, x_m) dx_1 \dots dx_m, \end{aligned}$$

где

$$G_m(a_1, \dots, a_m) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 \leq a_1, \dots, x_m \leq a_m\}.$$

Укажем также, что если зависимость переходной плотности от временных переменных есть на самом деле зависимость от $t - s$, то марковский процесс называется *однородным*, а в противном случае – *неоднородным*.

Заметим, что броуновское движение $\{W(t), t \geq 0\}$ является однородным марковским процессом с переходной плотностью

$$p(s, x; t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}, \quad 0 \leq s < t < +\infty, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Покажем, например, что

$$\mathbf{P}(W(t_1) \leq a_1, W(t_2) \leq a_2) = \iint_{x_1 \leq a_1, x_2 \leq a_2} p(0, 0; t_1, x_1) p(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2.$$

В самом деле, случайный вектор $(W(t_1), W(t_2))$ имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(W(t_1) \leq a_1, W(t_2) \leq a_2) = \\ & = \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1(t_2-t_1)}} \iint_{x_1 \leq a_1, x_2 \leq a_2} \exp\left(-\frac{t_2 x_1^2 - 2t_1 x_1 x_2 + t_1 x_2^2}{2t_1(t_2-t_1)}\right) dx_1 dx_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1(t_2-t_1)}} \iint_{x_1 \leq a_1, x_2 \leq a_2} \exp\left(-\frac{(t_2-t_1)x_1^2 + t_1(x_2-x_1)^2}{2t_1(t_2-t_1)}\right) dx_1 dx_2 = \\
&= \iint_{x_1 \leq a_1, x_2 \leq a_2} p(0, 0; t_1, x_1) p(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Теорема 2. Броуновский мост является неоднородным марковским процессом с переходной плотностью

$$\begin{aligned}
&p_0(s, x; t, y) = \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t(1-t)}\right), & 0 = s < t < 1, x = 0, y \in \mathbb{R}; \\ \frac{1-s}{\sqrt{2\pi(t-s)(1-t)}} \exp\left(-\frac{((1-s)y - (1-t)x)^2}{2(1-s)(t-s)(1-t)}\right), & 0 < s < t < 1, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1$. Требуется показать, что для произвольных $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(W_0(t_k) \leq a_k, k \in I_m) = \\
&= \int \dots \int_{G_m(a_1, \dots, a_m)} p_0(0, 0; t_1, x_1) p_0(t_1, x_1; t_2, x_2) \dots p_0(t_{m-1}, x_{m-1}; t_m, x_m) dx_1 \dots dx_m.
\end{aligned} \tag{3}$$

По теореме 1, учитывая, что случайный вектор $\{W_0(t_1), \dots, W_0(t_m)\}$ принадлежит границе множества $G_m(a_1, \dots, a_m)$ с нулевой вероятностью, получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(W_0(t_k) \leq a_k, k \in I_m) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(W(t_k) \leq a_k, k \in I_m \mid |W(1)| \leq \varepsilon) = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(W(t_k) \leq a_k, k \in I_m; |W(1)| \leq \varepsilon)}{\mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Поскольку броуновское движение является однородным марковским процессом с переходной плотностью $p(s, x; t, y)$, то

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(W(t_k) \leq a_k, k \in I_m; |W(1)| \leq \varepsilon) = \\
&= \int \dots \int_{G_m(a_1, \dots, a_m) \times [-\varepsilon, \varepsilon]} \prod_{k=0}^m p(t_k, x_k; t_{k+1}, x_{k+1}) dx_1 \dots dx_{m+1} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x_{m+1}) dx_{m+1},
\end{aligned}$$

где

$$f(x_{m+1}) = \int \dots \int_{G_m(a_1, \dots, a_m)} \prod_{k=0}^m p(t_k, x_k; t_{k+1}, x_{k+1}) dx_1 \dots dx_m$$

(считаем, что $x_0 = 0$). Итак,

$$\mathbf{P}(W_0(t_k) \leq a_k, k \in I_m) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x_{m+1}) dx_{m+1}}{\mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon)}. \tag{4}$$

Обозначим $p(x)$ плотность вероятностей случайной величины $W(1)$. Очевидно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon) \sim 2\varepsilon p(0), \quad (5)$$

где $p(0) = 1/\sqrt{2\pi} = p(0, 0; 1, 0)$. Далее, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x_{m+1}) dx_{m+1} \sim 2\varepsilon f(0). \quad (6)$$

Из соотношений (4)-(6) находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(W_0(t_k) \leq a_k, k \in I_m) &= \frac{f(0)}{p(0)} = \\ &= \int_{G_m(a_1, \dots, a_m)} \dots \int p(0, 0; t_1, x_1) \dots p(t_{m-1}, x_{m-1}; t_m, x_m) \frac{p(t_m, x_m; 1, 0)}{p(0, 0; 1, 0)} dx_1 \dots dx_m. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} p(0, 0; t_1, x_1) \dots p(t_{m-1}, x_{m-1}; t_m, x_m) \frac{p(t_m, x_m; 1, 0)}{p(0, 0; 1, 0)} &= \\ &= \prod_{k=0}^{m-1} \tilde{p}(t_k, x_k; t_{k+1}, x_{k+1}), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\tilde{p}(t_k, x_k; t_{k+1}, x_{k+1}) = \frac{p(t_{k+1}, x_{k+1}; 1, 0)}{p(t_k, x_k; 1, 0)} p(t_k, x_k; t_{k+1}, x_{k+1}).$$

Оказывается,

$$\tilde{p}(t_k, x_k; t_{k+1}, x_{k+1}) = p_0(t_k, x_k; t_{k+1}, x_{k+1}). \quad (9)$$

Докажем (9) при $k = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(0, 0; t_1, x_1) &= p(0, 0; t_1, x_1) \frac{p(t_1, x_1; 1, 0)}{p(0, 0; 1, 0)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} \frac{1}{\sqrt{1-t_1}} e^{-\frac{x_1^2}{2(1-t_1)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1(1-t_1)}} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1(1-t_1)}} = p_0(0, 0; t_1, x_1). \end{aligned}$$

Докажите (9) при $k > 0$ самостоятельно. Из соотношений (8) и (9) вытекает, что

$$\begin{aligned} p(0, 0; t_1, x_1) \dots p(t_{m-1}, x_{m-1}; t_m, x_m) \frac{p(t_m, x_m; 1, 0)}{p(0, 0; 1, 0)} &= \\ &= \prod_{k=0}^{m-1} p_0(t_k, x_k; t_{k+1}, x_{k+1}). \end{aligned} \quad (10)$$

Из (7) и (10) следует требуемое соотношение (3). Теорема доказана.

Введем функцию распределения Колмогорова:

$$K(0) = 0, \quad K(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 x^2), \quad x > 0.$$

Теорема 3. При $x \geq 0$

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |W_0(t)| \leq x \right) = K(x).$$

Доказательство. По теореме 1 при $x > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |W_0(t)| \leq x \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |W(t)| \leq x \mid |W(1)| \leq \varepsilon \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |W(t)| \leq x, |W(1)| \leq \varepsilon \right) / \mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon). \end{aligned} \quad (11)$$

Из теоремы 2 лекции 8 следует, что при $\varepsilon \in (0, x)$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |W(t)| \leq x, |W(1)| \leq \varepsilon \right) = \\ &= \mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon) - \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |W(t)| \geq x, |W(1)| \leq \varepsilon \right) = \\ &= \mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbf{P}^{((4k-2)x)}(|W(1)| \leq \varepsilon) - \mathbf{P}^{(4kx)}(|W(1)| \leq \varepsilon) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Нетрудно понять, что для каждого $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(a)}(|W(1)| \leq \varepsilon) &= \mathbf{P}(|a + W(1)| \leq \varepsilon) = \mathbf{P}(W(1) \in [-a - \varepsilon, -a + \varepsilon]) = \\ &= \Phi(-a + \varepsilon) - \Phi(-a - \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a-\varepsilon}^{-a+\varepsilon} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-u^2/2} du. \end{aligned} \quad (13)$$

Значит, функция $h_\varepsilon(a) := \mathbf{P}^{(a)}(|W(1)| \leq \varepsilon)$ убывает при $a \in [\varepsilon, +\infty)$ и

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbf{P}^{((4k-2)x)}(|W(1)| \leq \varepsilon) - \mathbf{P}^{(4kx)}(|W(1)| \leq \varepsilon) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (h_\varepsilon((4k-2)x) - h_\varepsilon(4kx)) = h_\varepsilon(2x) - h_\varepsilon(4x) + h_\varepsilon(6x) - h_\varepsilon(8x) + \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

причем последний ряд является знакоперевающимся и (поскольку $x > \varepsilon$) модули его членов убывают. Из соотношений (12) и (14) находим, что

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |W(t)| \leq x, |W(1)| \leq \varepsilon \right) = h_\varepsilon(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k h_\varepsilon(2kx). \quad (15)$$

В силу (13)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h_\varepsilon(a)}{\mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}^{(a)}(|W(1)| \leq \varepsilon)}{\mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon)} = e^{-\frac{a^2}{2}}. \quad (16)$$

Из соотношений (15) и (16) находим, что для произвольного $L \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^{2L+1} (-1)^k e^{-2k^2 x^2} &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{2L+1} (-1)^k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h_\varepsilon(2kx)}{\mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon)} \leq \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |W(t)| \leq x, |W(1)| \leq \varepsilon \right) / \mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon) \leq \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |W(t)| \leq x, |W(1)| \leq \varepsilon \right) / \mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon) \leq \\ &\leq 1 + 2 \sum_{k=1}^{2L} (-1)^k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h_\varepsilon(2kx)}{\mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon)} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{2L} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}. \end{aligned}$$

Откуда, переходя к пределу при $L \rightarrow \infty$, получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |W(t)| \leq x, |W(1)| \leq \varepsilon \right) / \mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon) &= \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2} = K(x). \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.