Лекция 6

Условия сходимости по распределению случайных процессов с траекториями без разрывов второго рода

Рассмотрим пространство $D[0,1]$ числовых функций, имеющих пределы слева и непрерывных справа на отрезке $[0,1]$. Такие функции измеримы, ограничены и имеют не более чем счетное множество точек разрыва; причем число точек, разрыв в которых превосходит заданное положительное число, конечно.

Введем на $D[0,1]$ *метрику Скорохода*: для $x, y \in D[0,1]$

$$\rho_{\text{ск}}(x,y) = \inf_{\lambda} \max \left\{ \sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t\in[0,1]} |x(\lambda(t)) - y(t)| \right\}.$$

Инфимум здесь берется по всем строго возрастающим и непрерывным отображениям λ отрезка $[0,1]$ на себя. Две функции в этой метрике близки друг к другу, если график одной из них получается из графика другой с помощью небольших деформаций как вдоль оси ординат, так и вдоль оси абсцисс. Очевидно, что $\rho_{\text{равн}}(x,y) \geq \rho_{\text{ск}}(x,y)$.

Пример 1. Пусть

$$x(t) = \begin{cases} 1, \ t \in [0;1/2); \\ 1/2, \ t \in [1/2;1]; \end{cases} \quad \text{и} \quad y(t) = \begin{cases} 1, \ t \in [0;2/3); \\ 1/2, \ t \in [2/3;1]. \end{cases}$$

Ясно, что $\rho_{\text{равн}}(x,y) = 1/2$. Пусть

$$\lambda(t) = \begin{cases} 3t/4, \ t \in [0;2/3); \\ 1/2 + (3/2)(t - 2/3), \ t \in [2/3;1]. \end{cases}$$

Тогда $\lambda(2/3) = 1/2$ и

$$x(\lambda(t)) \equiv y(t), \quad \sup_{t\in[0,1]} |x(\lambda(t)) - y(t)| = 0, \quad \sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t| = 1/6.$$

Нетрудно показать, что $\rho_{\text{ск}}(x,y) = 1/6$.

Пространство $D[0,1]$ с метрикой Скорохода сепарабельно. В нем всюду плотно множество ступенчатых функций, принимающих рациональные значения в точке 1 и на промежутках $[i/k, (i+1)/k)$, где $k \in \mathbb{N}$, а $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

Положим для $x \in D[0,1]$ и a, b таких, что $0 \leq a < b \leq 1$,

$$w_x[a,b) = \sup_{s,t\in[a,b)} |x(s) - x(t)|.$$

Напомним, что разбиением отрезка $[0,1]$ называется совокупность точек $t_0, t_1, \ldots, t_r$ (при $r \in \mathbb{N}$) таких, что $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1$. Введем *модуль непрерывности* для $x \in D[0,1]$:

$$w'_x(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_i w_x [t_i, t_{i+1}),$$

где δ – положительное число, а инфимум берется по всем разбиениям $\{t_i\}$ отрезка $[0,1]$, для которых $\min_i (t_{i+1} - t_i) \geq \delta$. Заметим, что ранее можно было определить аналогичный модуль непрерывности для непрерывных функций (достаточный для наших целей):

$$\widetilde{w}_x(\delta) = \max\{w_x[0,\delta), w_x[\delta, 2\delta), \ldots\}.$$

Если x – ступенчатая функция и δ не больше наименьшей длины ступенек, то $w'_x(\delta) = 0$. Однако, если функция x, принадлежащая $D[0,1]$, имеет конечное число точек разрыва, то ее модуль непрерывности $w'_x(\delta)$ может отличаться от $w'_{\widetilde{x}}(\delta)$ (при всех достаточно малых δ), где $\widetilde{x}$ – непрерывная функция, получающаяся из x путем устранения разрывов (приведите пример).

Лемма 1. *Если числовая функция x, заданная на отрезке $[0,1]$, принадлежит пространству $D[0,1]$, то $\lim_{\delta\to 0} w'_x(\delta) = 0$.*

Доказательство. Достаточно для любого $\varepsilon > 0$ установить существование такого разбиения $\{t_i\}$ отрезка $[0,1]$, для которого $\max_i w_x[t_i, t_{i+1}) < \varepsilon$ (тогда $w'_x(\delta) < \varepsilon$ при $\delta \leq \min_i (t_{i+1} - t_i)$). Рассмотрим множество B, состоящее из таких $t \in (0,1]$, для которых существует такое разбиение $\left\{t_i^{(t)}\right\}$ отрезка $[0,t]$, что $\max_i w_x \left[t_i^{(t)}, t_{i+1}^{(t)}\right) < \varepsilon$. Это множество не пусто, поскольку в силу непрерывности функции x справа в точке 0, существует такое $t \in (0,1]$, что $w_x[0,t) < \varepsilon$. Ясно, что это $t \in B$ (соответствующее рабиение отрезка $[0,t]$ состоит из двух точек 0 и t). Пусть τ – точная верхняя грань множества B. Покажем, что $\tau \in B$. Действительно, существует t такое, что $t < \tau$ и при этом существует такое разбиение $\left\{t_i^{(t)}\right\}$ отрезка $[0,t]$, что $\max_i w_x \left[t_i^{(t)}, t_{i+1}^{(t)}\right) < \varepsilon$. Это t можно выбрать сколь угодно близко к точке τ, поскольку τ – точная верхняя грань множества B. У функции x существует предел слева в точке τ, поэтому t можно подобрать так, что $w_x[t,\tau) < \varepsilon$. Тогда требуемое разбиение$\left\{t_i^{(\tau)}\right\}$ отрезка $[0,\tau]$ получается добавлением к разбиению $\left\{t_i^{(t)}\right\}$ еще одной точки τ. Покажем, что τ не может быть меньше 1. В противном случае ввиду непрерывности функции x справа в точке τ существует такое t, что $t > \tau$ и $w_x[\tau, t) < \varepsilon$. Тогда это $t \in B$ (соответствующее разбиение отрезка $[0,t]$ получается из разбиения $\left\{t_i^{(\tau)}\right\}$ отрезка $[0,\tau]$ добавлением еще одной точки t. Приходим к противоречию. Итак, $\tau = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $x \in D[0,1]$, то при $\delta > 0$ справедливо неравенство $w'_x(\delta) \leq w_x(2\delta)$.*

Доказательство. Разобьем отрезок $[0,1]$ так, чтобы $\delta \leq t_{i+1} - t_i \leq 2\delta$. Тогда для любого i выполняется неравенство $w_x(2\delta) \geq w_x[t_i, t_{i+1})$ и, следовательно,

$$w_x(2\delta) \geq \max_i w_x[t_i, t_{i+1}) \geq w'_x(\delta).$$

Лемма доказана.

Для произвольной функции $x \in D[0,1]$ построим ее *ступенчатое приближение* $x^{(\delta)}$ при $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$:

$$x^{(\delta)}(t) = \begin{cases} x(\delta k), \ t \in [\delta k, \delta(k+1)), \ k \in \{0, 1, \dots, m-1\}; \\ x(1), \ t = 1. \end{cases}$$

Зададим отображение $g^{(m)} : \mathbb{R}^{m+1} \to D[0,1]$. Произвольному вектору $\overline{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ сопоставим ступенчатую функцию $g^{(m)}(\overline{x}) \in D[0,1]$:

$$\left(g^{(m)}(\overline{x})\right)(t) = \begin{cases} x_k, \ t \in [\delta k, \delta(k+1)), \ k \in \{0, 1, \dots, m-1\}; \\ x_m, \ t = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что отображение $g^{(m)}$ является непрерывным и

$$x^{(\delta)} = g^{(m)}(x(0), x(1/m), x(2/m), \dots, x(1)).$$

Лемма 3. *Если $x \in D[0,1]$, то при $\delta > 0$ справедливо неравенство*

$$\rho_{\text{ск}}\left(x, x^{(\delta)}\right) \leq w'_x(\delta) + \delta,$$

поэтому

$$\lim_{\delta \to 0} \rho_{\text{ск}}\left(x, x^{(\delta)}\right) = 0.$$

Доказательство. Существует такое разбиение $\{s_i\}$ отрезка $[0,1]$, что $\min_i(s_{i+1} - s_i) \geq \delta$ и $\max_i w_x[s_i, s_{i+1}) \leq w'_x(\delta) + \delta$. Пусть $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим разбиение $t_j = j\delta$, $j \in \{0, 1, \dots, m\}$. Для каждой точки $s_i \in (0,1)$ существует единственный промежуток $[t_{j_i}, t_{j_i+1})$, ее содержащий. Очевидно, t_{j_i+1} строго возрастает по i.

Возьмем в качестве λ кусочно-линейную функцию, отображающую t_{j_i+1} в s_i для каждого i. Ясно, что

$$\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t| \leq \delta. \tag{1}$$

Пусть $t \in \left[t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1}\right)$, тогда $\lambda(t) \in [s_i, s_{i+1})$. Поэтому множесто значений функции $x(\lambda(t))$ при $t \in \left[t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1}\right)$ совпадает с множеством $\{x(s), \ s \in [s_i, s_{i+1})\}$. Функция $x^{(\delta)}(t)$ при $t \in \left[t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1}\right)$ принимает значения $x(t_{j_i+1}), \dots, x\left(t_{j_{i+1}}\right)$, причем $t_{j_i+1}, \dots, t_{j_{i+1}} \in [s_i, s_{i+1})$. Поэтому множество значений функции $x^{(\delta)}(t)$ при $t \in \left[t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1}\right)$ вложено в множество $\{x(s), \ s \in [s_i, s_{i+1})\}$. Сказанное означает, что для каждого i

$$\sup_{t \in \left[t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1}\right)} \left|x^{(\delta)}(t) - x(\lambda(t))\right| \leq w_x[s_i, s_{i+1}).$$

Следовательно,

$$\sup_{t\in[0,1]}\left|x^{(\delta)}(t)-x(\lambda(t))\right|\le\max_i w_x[s_i,s_{i+1})\le w'_x(\delta)+\delta. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует утверждение леммы.

Пусть X – случайный процесс с траекториями из $D[0,1]$, тогда X является случайным элементом со значениями в измеримом пространстве $D[0,1]$ с заданной на нем цилиндрической σ-алгеброй. Напомним, что пространство $D[0,1]$ является сепарабельным метрическим относительно метрики Скорохода. Обозначим $\mathcal{B}(D[0,1])$ борелевскую σ-алгебру относительно метрики Скорохода. Нетрудно доказать, что $\mathcal{B}(D[0,1])$ совпадает с цилиндрической σ-алгеброй пространства $D[0,1]$. Таким образом, случайный процесс с траекториями из $D[0,1]$ является случайным элементом со значениями в пространстве $(D[0,1],\mathcal{B}(D[0,1]))$ и, значит, мы имеем право использовать теорию сходимости по распределению.

Теорема 1 (Скороход). *Пусть $X,X_1,X_2,\ldots$ – случайные процессы с траекториями из $D[0,1]$. Если последовательность случайных процессов $\{X_n\}$ сходится при $n\to\infty$ в смысле конечномерных распределений к процессу X и для любого $\varepsilon>0$*

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}_n\left(w'_{X_n}(\delta)\ge\varepsilon\right)=0, \tag{3}$$

то $X_n\xrightarrow{D}X$ при $n\to\infty$ (в пространстве $D[0,1]$).

Доказательство. Положим $\delta=1/m$, $m\in\mathbb{N}$, и по X_n построим ступенчатое приближение $Y_{m,n}=X_n^{(\delta)}$, а по X построим $Y_m=X^{(\delta)}$.

В силу ранее сказанного

$$X_n^{(\delta)}=g^{(m)}(X_n(0),X_n(1/m),X_n(2/m),\ldots,X_n(1)),$$
$$X^{(\delta)}=g^{(m)}(X(0),X(1/m),X(2/m),\ldots,X(1)),$$

где $g^{(m)}$ является непрерывным отображением $\mathbb{R}^{m+1}$ в $D[0,1]$. По условию теоремы при $n\to\infty$

$$(X_n(0),X_n(1/m),\ldots,X_n(1))\xrightarrow{D}(X(0),X(1/m),\ldots,X(1)).$$

Поэтому на основании теоремы 1 лекции 4 при $n\to\infty$

$$X_n^{(\delta)}\xrightarrow{D}X^{(\delta)},$$

т.е.

$$Y_{m,n}\xrightarrow{D}Y_m. \tag{4}$$

Далее, по лемме 3

$$\rho_{\text{ск}}(X,Y_m)=\rho_{\text{ск}}\left(X,X^{(\delta)}\right)\to0 \text{ при } \delta\to0,$$

т.е. имеет место сходимость п.н. Но из сходимости п.н. следует сходимость по распределению, т.е. при $m\to\infty$

$$Y_m\xrightarrow{D}X. \tag{5}$$

Наконец, ввиду леммы 3

$$\rho_{\text{ск}}\left(Y_{m,n}; X_n\right) = \rho_{\text{ск}}\left(X_n^{(\delta)}, X_n\right) \leq w'_{X_n}\left(\delta\right) + \delta.$$

Поэтому по условию (3) при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}_n\left(\rho_{\text{ск}}\left(Y_{m,n}; X_n\right) - \delta \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}_n\left(\rho_{\text{ск}}\left(Y_{m,n}; X_n\right) \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{6}$$

Из соотношений (4)-(6) по теореме 2 лекции 4 получаем утверждение теоремы 1.

Частое применение находит следующий результат, который будем называть теоремой о *C-сходимости*.

Теорема 2. *Пусть* $X, X_1, X_2, \ldots$ *– случайные процессы с траекториями из* $D\left[0,1\right]$. *Пусть последовательность случайных процессов* $\{X_n\}$ *сходится при* $n \to \infty$ *в смысле конечномерных распределений к процессу* X *и для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}_n\left(w_{X_n}\left(\delta\right) \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{7}$$

Тогда при $n \to \infty$

$$X_n \overset{D}{\to} X \tag{8}$$

(*в пространстве* $D\left[0,1\right]$), *причем траектории процесса* X *п.н. непрерывны.*

Доказательство. Из соотношения (7) в силу леммы 2 получаем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}_n\left(w'_{X_n}\left(\delta\right) \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Откуда, вспоминая теорему 1, получаем (8). Доказательство непрерывности траекторий X предоставляется читателю.

В заключение обсудим требование о сходимости в смысле конечномерных распределений. Рассмотрим отображение $D\left[0,1\right]$ в $\mathbb{R}$: $x \to x\left(t\right)$, где t – фиксированное число из отрезка $\left[0,1\right]$. Это отображение измеримо. Оно непрерывно при $t = 0$ и при $t = 1$. При $t \in (0,1)$ оно является непрерывным тогда и только тогда, когда функция x непрерывна в точке t (см. доказательство леммы 4). Следовательно, это отображение непрерывно при $t = 0$, при $t = 1$ и при всех $t \in (0,1)$, за исключением не более чем счетного множества.

Можно доказать более сильное утверждение. Пусть P – произвольная вероятностная мера, заданная на $D\left[0,1\right]$. Оказывается, множество T_P таких t, при которых указанное отображение непрерывно P-п.н., содержит точки 0 и 1 и его дополнение в $\left[0,1\right]$ не более чем счетно.

В силу этих свойств множества T_P для любого $\delta > 0$ существует такое разбиение $\{t_i\}$ отрезка $\left[0,1\right]$, что $t_i \in T_P$ и $t_{i+1} - t_i \leq \delta$ для любого i. По функции $x \in D\left[0,1\right]$ будем строить ее ступенчатое приближение $x^{(\delta)}$, исходя из этого разбиения. Тогда (см. лемму 3) $\rho_{\text{ск}}\left(x, x^{(\delta)}\right) \leq w'_x\left(\delta\right) + \delta$.

Из сказанного следует, что если $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные процессы с траекториями из $D\,[0,1]$, то из сходимости $X_n \overset{D}{\to} X$ при $n \to \infty$ (в пространстве $D\,[0,1]$) следует сходимость конечномерных распределений, соответствующих точкам $t_{1,}t_2, \ldots, t_m$ из T_{P_X}, где P_X - мера, индуцированная случайным процессом X в $(D\,[0,1]\,, \mathcal{B}(D\,[0,1]))$. Наоборот, если в условиях теорем 1 и 2 вместо сходимости произвольных конечномерных распределений потребовать сходимость конечномерных распределений, соответствующих точкам $t_{1,}t_2, \ldots, t_m$ из T_{P_X}, то $X_n \overset{D}{\to} X$ при $n \to \infty$.