Лекция 4

Свойства сходимости по распределению

Рассмотрим основные свойства сходимости по распределению.

Теорема 1. *Пусть g – непрерывное отображение метрического пространства S в другое метрическое пространство S'. Если $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные элементы со значениями в $(S, \mathcal{B}(S))$ и $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \to \infty$, то $g(X), g(X_1), g(X_2), \ldots$ – случайные элементы со значениями в $(S', \mathcal{B}(S'))$ и $g(X_n) \xrightarrow{D} g(X)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть f – непрерывная ограниченная числовая функция, заданная на S'. Тогда $f \circ g$ – непрерывная ограниченная числовая функция, заданная на S, и поэтому при $n \to \infty$

$$\mathbf{E}_n f(g(X_n)) = \mathbf{E}_n f \circ g(X_n) \to \mathbf{E} f \circ g(X) = \mathbf{E} f(g(X)).$$

Теорема доказана.

Теорема 1$'$. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные элементы со значениями в $(S, \mathcal{B}(S))$ и при $n \to \infty$*

$$X_n \xrightarrow{D} X. \tag{1}$$

Пусть g – измеримое отображение S в метрическое пространство S' (это *означает, что прообраз борелевского множества в S' является борелевским множеством в S) и C_g – множество тех элементов S, в которых отображение g непрерывно. Если $\mathbf{P}(X \in C_g) = 1$, то при $n \to \infty$*

$$g(X_n) \xrightarrow{D} g(X).$$

Доказательство. Пусть F – замкнутое множество, принадлежащее $\mathcal{B}(S')$. Покажем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n (g(X_n) \in F) \le \mathbf{P}(g(X) \in F) = \mathbf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right), \tag{2}$$

где $g^{-1}(F)$ – прообраз F.

Из условия (1) по теореме Алексадрова получаем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n (g(X_n) \in F) = \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n \left(X_n \in g^{-1}(F)\right) \le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n \left(X_n \in \left[g^{-1}(F)\right]\right) \le \mathbf{P}\left(X \in \left[g^{-1}(F)\right]\right), \tag{3}$$

где, напомним, $\left[g^{-1}(F)\right]$ – замыкание множества $g^{-1}(F)$.

Покажем, что

$$\mathbf{P}\left(X \in \left[g^{-1}(F)\right]\right) = \mathbf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right). \tag{4}$$

Пусть D_g – множество элементов S, в которых отображение g разрывно (множества C_g и D_g являются борелевскими). Тогда $S = C_g + D_g$ и

$$\left[g^{-1}(F)\right] = \left[g^{-1}(F)\right] D_g + \left[g^{-1}(F)\right] C_g \subset D_g + \left[g^{-1}(F)\right] C_g. \qquad (5)$$

Установим, что

$$\left[g^{-1}(F)\right] C_g \subset g^{-1}(F). \qquad (6)$$

Действительно, пусть x принадлежит $\left[g^{-1}(F)\right] C_g$. Из того, что $x \in \left[g^{-1}(F)\right]$, следует, что существует такая последовательность элементов $\{x_n\}$, что $x_n \in g^{-1}(F)$ и $x_n \to x$. Кроме того, $x \in C_g$ и, следовательно, отображение g непрерывно в x и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$. Но $g(x_n) \in F$ и поэтому $g(x) \in F$, т.к. F – замкнутое множество. Следовательно, $x \in g^{-1}(F)$. Итак, (6) доказано. Из (5) и (6) вытекает, что

$$\left[g^{-1}(F)\right] \subset D_g + g^{-1}(F).$$

Откуда получаем, что

$$\mathbf{P}\left(X \in \left[g^{-1}(F)\right]\right) \leq \mathbf{P}(X \in D_g) + \mathbf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right) = \mathbf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right),$$

поскольку $\mathbf{P}(X \in D_g) = 0$. Противоположное неравенство

$$\mathbf{P}\left(X \in \left[g^{-1}(F)\right]\right) \geq \mathbf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right)$$

очевидно. Таким образом, соотношение (4) доказано.

Из (3) и (4) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(g(X_n) \in F\right) \leq \mathbf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right),$$

т.е. соотношение (2) справедливо. Теорема доказана.

Центральную роль в дальнейшем играет *теорема о двупараметрической случайной последовательности*. Предположим, что случайные элементы $X_n, Y_{1,n}, Y_{2,n}, \ldots$ со значениями в $(S, \mathcal{B}(S))$ определены на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Предположим также, что Y_m – случайный элемент, отображающий вероятностное пространство $\left(\widetilde{\Omega}_m, \widetilde{\mathcal{F}}_m, \widetilde{\mathbf{P}}_m\right)$ в $(S, \mathcal{B}(S))$, $m \in \mathbb{N}$. Наконец, X – случайный элемент, отображающий вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в $(S, \mathcal{B}(S))$.

Теорема 2. *Предположим, что метрическое пространство S* (с метрикой ρ) *сепарабельно. Пусть $Y_{m,n} \stackrel{D}{\to} Y_m$ при $n \to \infty$, $Y_m \stackrel{D}{\to} X$ при $m \to \infty$ и для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(\rho(X_n; Y_{m,n}) \geq \varepsilon) = 0.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$X_n \stackrel{D}{\to} X.$$

Замечание 1. Сепарабельность пространства S обеспечивает измеримость числовой функции $\rho(X_n; Y_{m,n})$, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть F – замкнутое множество пространства S. Заметим, что и множество $F_\varepsilon := \{x \in S : \rho(x, F) \le \varepsilon\}$, где $\rho(x, F)$ – расстояние от точки x до множества F, является замкнутым. Очевидно, что

$$\{X_n \in F\} = \{X_n \in F,\ \rho(X_n; Y_{m,n}) < \varepsilon\} \cup \{X_n \in F,\ \rho(X_n; Y_{m,n}) \ge \varepsilon\}.$$

Но первое событие в правой части влечет событие $\{Y_{m,n} \in F_\varepsilon\}$, а второе – влечет событие $\{\rho(X_n; Y_{m,n}) \ge \varepsilon\}$. Поэтому

$$\mathbf{P}_n(X_n \in F) \le \mathbf{P}_n(Y_{m,n} \in F_\varepsilon) + \mathbf{P}_n(\rho(X_n, Y_{m,n}) \ge \varepsilon).$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$, учитывая критерий 4) теоремы Александрова:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(X_n \in F) \le \widetilde{\mathbf{P}}_m(Y_m \in F_\varepsilon) + \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(\rho(X_n, Y_{m,n}) \ge \varepsilon).$$

В этом соотношении перейдем к пределу при $m \to \infty$:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(X_n \in F) \le \mathbf{P}(X \in F_\varepsilon) + \limsup_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(\rho(X_n, Y_{m,n}) \ge \varepsilon).$$

Но второе слагаемое в правой части равно нулю, поэтому

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(X_n \in F) \le \mathbf{P}(X \in F_\varepsilon).$$

А теперь в этом соотношении перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая аксиому непрерывности и то, что множества F_ε убывают с уменьшением ε и $\bigcap_\varepsilon F_\varepsilon = F$:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(X_n \in F) \le \mathbf{P}(X \in F).$$

Откуда, вспоминая критерий 4) теоремы Александрова, получаем требуемое утверждение.

Установим утверждение, близкое по смыслу теореме 2.

Теорема 3. *Пусть измеримые числовые функции $f, f_1, f_2, \ldots$ являются ограниченными на всей числовой прямой и*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| = 0. \tag{7}$$

Пусть для случайных величин $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ выполняется равенство

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} |\mathbf{E}_n f_m(\xi_n) - \mathbf{E} f_m(\xi)| = 0. \tag{8}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_n f(\xi_n) = \mathbf{E} f(\xi).$$

Доказательство. Заметим, что

$$|\mathbf{E}_n f(\xi_n) - \mathbf{E} f(\xi)| \le$$

$$\leq |\mathbf{E}_n f(\xi_n) - \mathbf{E}_n f_m(\xi_n)| + |\mathbf{E}_n f_m(\xi_n) - \mathbf{E} f_m(\xi)| + |\mathbf{E} f_m(\xi) - \mathbf{E} f(\xi)| \leq$$
$$\leq \mathbf{E}_n |f(\xi_n) - f_m(\xi_n)| + |\mathbf{E}_n f_m(\xi_n) - \mathbf{E} f_m(\xi)| + \mathbf{E} |f_m(\xi) - f(\xi)| \leq$$
$$\leq 2 \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| + |\mathbf{E}_n f_m(\xi_n) - \mathbf{E} f_m(\xi)|.$$

Сначала перейдем к пределу при $n \to \infty$:

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbf{E}_n f(\xi_n) - \mathbf{E} f(\xi)| \leq 2 \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| +$$
$$+ \limsup_{n\to\infty} |\mathbf{E}_n f_m(\xi_n) - \mathbf{E} f_m(\xi)|.$$

А теперь перейдем к пределу при $m \to \infty$. Используя условия (7) и (8), получаем утверждение теоремы.

Из доказанной теоремы следует теорема непрерывности для характеристических функций.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ – *характеристические функции случайных величин* $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ соответственно. *Следующие два утверждения эквивалентны*:
1) $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ *при* $n \to \infty$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ *при каждом* $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Соотношение 1) означает, что для произвольной непрерывной и ограниченной числовой функции f

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_n f(\xi_n) = \mathbf{E} f(\xi). \tag{9}$$

Соотношение 2) означает, что соотношение (9) справедливо для функций вида $f(x) = e^{itx}$, $x \in \mathbb{R}$ (здесь $t \in \mathbb{R}$ выполняет роль параметра). Сказанное означает, что из 1) следует 2). Докажем, что из 2) следует 1).

а) Сначала покажем, что соотношение (9) справедливо для непрерывно дифференцируемых периодических числовых функций f. Это непосредственно следует из теоремы 3. Пусть период функции f равен $2l$. Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ положим

$$f_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k \exp\left(i\frac{k\pi}{l}x\right) \text{ при } x \in \mathbb{R},$$

где

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) \exp\left(-i\frac{k\pi}{l}x\right) dx.$$

Другими словами, f_m – отрезок ряда Фурье функции f. Ввиду теоремы о равномерной сходимости ряда Фурье

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| = 0$$

и, следовательно, выполнено условие (7). Выполнено и условие (8). Действительно, в силу 2) при $n \to \infty$

$$\mathbf{E}_n f_m(\xi_n) = \mathbf{E}_n \sum_{k=-m}^{m} c_k \exp\left(i\frac{k\pi}{l}\xi_n\right) =$$

$$= \sum_{k=-m}^{m} c_k \mathbf{E}_n \exp\left(i\frac{k\pi}{l}\xi_n\right) = \sum_{k=-m}^{m} c_k \varphi_n\left(\frac{k\pi}{l}\right) \to \sum_{k=-m}^{m} c_k \varphi\left(\frac{k\pi}{l}\right) =$$

$$= \sum_{k=-m}^{m} c_k \mathbf{E} \exp\left(i\frac{k\pi}{l}\xi\right) = \mathbf{E} \sum_{k=-m}^{m} c_k \exp\left(i\frac{k\pi}{l}\xi\right) = \mathbf{E} f_m(\xi).$$

Итак, соотношение (9) справедливо для непрерывно дифференцируемых периодических числовых функций f.

б) Теперь покажем, что соотношение (9) справедливо для непрерывно дифференцируемых финитных функций.

Установим вспомогательное утверждение:

$$\lim_{l\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(|\xi_n| \geq l) = 0. \tag{10}$$

Действительно, при $u > 0$

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (1-\varphi_n(t))\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{u}\int_{-u}^{u} \left(1-e^{itx}\right) dt\right] dP_n =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1-\frac{\sin ux}{ux}\right) dP_n \geq 2 \int_{\{x:\ |x|\geq 2/u\}} \left(1-\frac{1}{|ux|}\right) dP_n \geq \mathbf{P}_n(|\xi_n| \geq 2/u),$$

где P_n – распределение случайной величины ξ_n на прямой. Следовательно, по теореме о мажорируемой сходимости

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(|\xi_n| \geq 2/u) \leq \frac{1}{u}\int_{-u}^{u} |1-\varphi(t)|\, dt.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $u \to 0$ по теореме о среднем, поскольку функция $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна и $\varphi(0) = 1$. Соотношение (10) доказано.

Пусть теперь f – финитная непрерывно дифференцируемая числовая функция, равная 0 вне некоторого промежутка $[-l, l]$. Пусть $f^{(l)}$ является $2l$-периодической функцией, совпадающей с функцией f на отрезке $[-l, l]$. Тогда

$$|\mathbf{E}_n f(\xi_n) - \mathbf{E} f(\xi)| \leq$$

$$\leq \left|\mathbf{E}_n f(\xi_n) - \mathbf{E}_n f^{(l)}(\xi_n)\right| + \left|\mathbf{E}_n f^{(l)}(\xi_n) - \mathbf{E} f^{(l)}(\xi)\right| + \left|\mathbf{E} f^{(l)}(\xi) - \mathbf{E} f(\xi)\right|. \tag{11}$$

Поскольку $f^{(l)}$ является периодической непрерывно дифференцируемой функцией, то по доказанному при $n \to \infty$

$$\mathbf{E}_n f^{(l)}(\xi_n) \to \mathbf{E} f^{(l)}(\xi). \tag{12}$$

Из соотношений (11), (12) находим, что

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbf{E}_n f(\xi_n) - \mathbf{E} f(\xi)| \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \left|\mathbf{E}_n f(\xi_n) - \mathbf{E}_n f^{(l)}(\xi_n)\right| + \left|\mathbf{E} f^{(l)}(\xi) - \mathbf{E} f(\xi)\right|. \tag{13}$$

Очевидно, что

$$\left|\mathbf{E} f^{(l)}(\xi) - \mathbf{E} f(\xi)\right| \leq \mathbf{E}\left|f^{(l)}(\xi) - f(\xi)\right| \leq 2c\mathbf{P}(|\xi| \geq l), \tag{14}$$

где $c = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Аналогично

$$\left|\mathbf{E}_n f(\xi_n) - \mathbf{E}_n f^{(l)}(\xi_n)\right| \leq \mathbf{E}_n \left|f(\xi_n) - f^{(l)}(\xi_n)\right| \leq 2c\mathbf{P}_n(|\xi_n| \geq l)$$

и, значит,

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\mathbf{E}_n f(\xi_n) - \mathbf{E}_n f^{(l)}(\xi_n)\right| \leq 2c \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(|\xi_n| \geq l). \tag{15}$$

Из соотношений (13)-(15) находим, что

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbf{E}_n f(\xi_n) - \mathbf{E} f(\xi)| \leq$$

$$\leq 2c \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(|\xi_n| \geq l) + 2c\mathbf{P}(|\xi| \geq l).$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbf{E}_n f(\xi_n) - \mathbf{E} f(\xi)| \leq$$

$$\leq 2c \limsup_{l\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(|\xi_n| \geq l) + 2c \limsup_{l\to\infty} \mathbf{P}(|\xi| \geq l). \tag{16}$$

Из соотношения (16) на основании (10) и равенства $\lim_{l\to\infty} \mathbf{P}(|\xi| \geq l) = 0$ получаем, что

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbf{E}_n f(\xi_n) - \mathbf{E} f(\xi)| = 0,$$

т.е. соотношение (9) справедливо для финитных непрерывно дифференцируемых числовых функций f.

в) Чтобы показать справедливость соотношения (9) для произвольной непрерывной и ограниченной числовой функции f, следует воспользоваться следующими утверждениями, сформулированными в виде задач.

Задача 1. Из соотношения (10) следует, что соотношение (9) достаточно доказать для функций, непрерывных на некотором отрезке и равных нулю вне этого отрезка.

Задача 2. Из предыдущего утверждения следует, что соотношение (9) достаточно доказать для финитных непрерывно дифференцируемых функций.

Теорема доказана.