Лекция 3

Сходимость по распределению. Теорема Александрова

Пусть S – метрическое пространство с метрикой ρ, а $\mathcal{B}(S)$ – его борелевская σ-алгебра, т.е. минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества S. Рассмотрим вероятностные меры $P, P_1, P_2, \ldots$, заданные на измеримом пространстве $(S, \mathcal{B}(S))$.

Определение 1. Говорят, что последовательность вероятностных мер $\{P_n\}$ *слабо сходится* к вероятностной мере P при $n \to \infty$, если для любой непрерывной ограниченной числовой функции $f(s)$, $s \in S$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(s)\, dP_n = \int_S f(s)\, dP. \tag{1}$$

В следующей *теореме А. Д. Александрова* приводятся *условия слабой сходимости* вероятностных мер.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *последовательность $\{P_n\}$ слабо сходится к P при $n \to \infty$;*

2) *для любого множества $A \in \mathcal{B}(S)$ такого, что $P(\partial A) = 0$ (∂A – граница множества A)*,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A);$$

3) *для любого замкнутого множества $F \in \mathcal{B}(S)$*

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \le P(F);$$

4) *для любого открытого множества $G \in \mathcal{B}(S)$*

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \ge P(G).$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 3). Требуется показать, что

$$\limsup_{n\to\infty} \int_S I_F(s)\, dP_n \le \int_S I_F(s)\, dP,$$

где I_F – индикатор множества F. Индикатор, вообще говоря, не является непрерывной функцией, поэтому нельзя напрямую воспользоваться соотношением (1), взяв в качестве функции f индикатор I_F.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество $F_\varepsilon = \{s : \rho(s, F) \le \varepsilon\}$, где $\rho(s, F)$ – расстояние от точки s до множества F. Это множество является замкнутым. Рассмотрим также функцию

$$f_\varepsilon(s) = \begin{cases} 1, & s \in F; \\ \frac{\varepsilon - \rho(s,F)}{\varepsilon}, & 0 < \rho(s, F) \le \varepsilon; \\ 0, & \rho(s, F) \ge \varepsilon. \end{cases}$$

Эта функция является непрерывной и ограниченной, поэтому, учитывая (1), находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S f_\varepsilon(s)\, dP_n = \int\limits_S f_\varepsilon(s)\, dP. \tag{2}$$

Заметим, что

$$\int\limits_S f_\varepsilon(s)\, dP_n = P_n(F) + \int\limits_{F_\varepsilon \setminus F} f_\varepsilon(s)\, dP_n$$

и, следовательно,

$$P_n(F) \le \int\limits_S f_\varepsilon(s)\, dP_n \le P_n(F) + P_n(F_\varepsilon \setminus F). \tag{3}$$

Аналогично

$$P(F) \le \int\limits_S f_\varepsilon(s)\, dP \le P(F) + P(F_\varepsilon \setminus F). \tag{4}$$

Из соотношений (2)-(4) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \le \limsup_{n\to\infty} \int\limits_S f_\varepsilon(s)\, dP_n = \int\limits_S f_\varepsilon(s)\, dP \le$$

$$\le P(F) + P(F_\varepsilon \setminus F). \tag{5}$$

Множества F_ε не убывают с ростом ε и $\bigcap_{\varepsilon\in(0,+\infty)} F_\varepsilon = F$, поскольку F – замкнутое множество. Следовательно, по аксиоме непрерывности

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P(F_\varepsilon \setminus F) = 0. \tag{6}$$

Переходя в (5) к пределу при $\varepsilon \to 0$ на основании (6) получаем, что утверждение 3) справедливо.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $f(s)$, $s \in S$, – произвольная непрерывная ограниченная числовая функция. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < f(s) < 1$, $s \in S$. Для произвольного $k \in \mathbb{N}$ и $i \in \{0, \ldots, k\}$ введем множества

$$A_{i,k} = \left\{ s : \frac{i-1}{k} \le f(s) < \frac{i}{k} \right\}$$

и

$$B_{i,k} = \left\{ s : f(s) \ge \frac{i}{k} \right\},$$

принадлежащие $\mathcal{B}(S)$. Ясно, что

$$P(A_{i,k}) = P(B_{i-1,k}) - P(B_{i,k}). \tag{7}$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k} P\left(A_{i,k}\right) \le \int\limits_{S} f\left(s\right) dP \le \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} P\left(A_{i,k}\right). \tag{8}$$

Ввиду (7)

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} P\left(A_{i,k}\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} \left(P\left(B_{i-1,k}\right) - P\left(B_{i,k}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{i+1}{k} P\left(B_{i,k}\right) - \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} P\left(B_{i,k}\right) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} P\left(B_{i,k}\right). \tag{9}$$

Аналогично

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k} P\left(A_{i,k}\right) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} P\left(B_{i,k}\right). \tag{10}$$

Из соотношений (8)-(10) следует, что

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} P\left(B_{i,k}\right) \le \int\limits_{S} f\left(s\right) dP \le \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} P\left(B_{i,k}\right). \tag{11}$$

Аналогично показывается, что

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} P_n\left(B_{i,k}\right) \le \int\limits_{S} f\left(s\right) dP_n \le \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} P_n\left(B_{i,k}\right). \tag{12}$$

Далее, поскольку $B_{i,k}$ является замкнутым множеством, то

$$\limsup_{n\to\infty} P_n\left(B_{i,k}\right) \le P\left(B_{i,k}\right). \tag{13}$$

Из соотношений (11)-(13) находим, что

$$\limsup_{n\to\infty} \int\limits_{S} f\left(s\right) dP_n \le \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \limsup_{n\to\infty} P_n\left(B_{i,k}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} P\left(B_{i,k}\right) \le \frac{1}{k} + \int\limits_{S} f\left(s\right) dP.$$

Поскольку k произвольно, это означает, что

$$\limsup_{n\to\infty} \int\limits_{S} f\left(s\right) dP_n \le \int\limits_{S} f\left(s\right) dP. \tag{14}$$

Применяя теперь (14) к функции $\widetilde{f}\left(s\right) = 1 - f\left(s\right)$, находим, что

$$\liminf_{n\to\infty} \int\limits_{S} f\left(s\right) dP_n \ge \int\limits_{S} f\left(s\right) dP. \tag{15}$$

Из соотношений (14), (15) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_S f\left(s\right)dP_n=\int\limits_S f\left(s\right)dP,$$

т.е. утверждение 1) справедливо.

3) $\Leftrightarrow$ 4). Следует воспользоваться тем фактом, что дополнение открытого (замкнутого) множества является замкнутым (открытым) множеством.

3), 4) $\Rightarrow$ 2). Пусть A^0 – внутренность множества A, а $[A]$ – замыкание множества A, т.е. объединение A и всех его предельных точек. Поскольку A^0 является открытым множеством, а $[A]$ – замкнутым и $[A]\supset A\supset A^0$, то

$$P\left([A]\right)\geq\limsup_{n\to\infty}P_n\left([A]\right)\geq\limsup_{n\to\infty}P_n\left(A\right)\geq$$

$$\geq\liminf_{n\to\infty}P_n\left(A\right)\geq\liminf_{n\to\infty}P_n\left(A^0\right)\geq P\left(A^0\right). \tag{16}$$

Далее, $P(\partial A)=0$ и, следовательно, крайние члены (16) совпадают. Таким образом,

$$\limsup_{n\to\infty}P_n\left(A\right)=\liminf_{n\to\infty}P_n\left(A\right)=P\left(A\right)$$

и, значит, утверждение 2) справедливо.

2) $\Rightarrow$ 3). Граница множества F_ε содержится в $A_\varepsilon=\{s:\rho\left(s,F\right)=\varepsilon\}$. Множества A_ε при разных ε попарно не пересекаются, поэтому $P\left(A_\varepsilon\right)=0$ при всех $\varepsilon\in(0,+\infty)$, за исключением не более чем счетного множества. Следовательно, можно выбрать положительную убывающую последовательность $\{\varepsilon_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ такую, что $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$ и $P\left(A_{\varepsilon_k}\right)=0$ при $k\in\mathbb{N}$. Из сказанного следует, что для каждого $k\in\mathbb{N}$

$$\limsup_{n\to\infty}P_n\left(F\right)\leq\limsup_{n\to\infty}P_n\left(F_{\varepsilon_k}\right)=P\left(F_{\varepsilon_k}\right). \tag{17}$$

По аксиоме непрерывности

$$\lim_{k\to\infty}P\left(F_{\varepsilon_k}\right)=P\left(F\right). \tag{18}$$

Переходя в (17) к пределу при $k\to\infty$ и учитывая (18), получаем утверждение 3). Теорема доказана.

Пусть X – случайный элемент, отображающий вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ в $(S,\mathcal{B}(S))$, и пусть P – вероятностная мера, индуцированная X на $(S,\mathcal{B}(S))$, т.е.

$$P(A)=\mathbf{P}(\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in A\}),\qquad A\in\mathcal{B}(S).$$

Рассмотрим последовательность случайных элементов X_n, $n\in\mathbb{N}$, отображающих, вообще говоря, разные вероятностные пространства $(\Omega_n,\mathcal{F}_n,\mathbf{P}_n)$ в пространство $(S,\mathcal{B}(S))$. Пусть при этом P_n – вероятностная мера, индуцированная X_n на $(S,\mathcal{B}(S))$, $n\in\mathbb{N}$.

Определение 2. Говорят, что последовательность случайных элементов $\{X_n\}$ *сходится по распределению* при $n\to\infty$ к случайному элементу X, если $\{P_n\}$ слабо сходится к P при $n\to\infty$. Эта сходимость обозначается так: $X_n\overset{D}{\to}X$.

Теорема 1 может быть переформулирована.

Теорема 1′. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) $X_n \xrightarrow{D} X$ *при* $n \to \infty$;

2) *для любой непрерывной ограниченной числовой функции* f, *заданной на* S,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_n f(X_n) = \mathbf{E} f(X)$$

(*здесь символ* $\mathbf{E}_n$ *означает математическое ожидание, соответствующее мере* $\mathbf{P}_n$);

3) *для любого множества* $A \in \mathcal{B}(S)$ *такого, что* $\mathbf{P}(X \in \partial A) = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(X_n \in A) = \mathbf{P}(X \in A);$$

4) *для любого замкнутого множества* $F \in \mathcal{B}(S)$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(X_n \in F) \le \mathbf{P}(X \in F);$$

5) *для любого открытого множества* $G \in \mathcal{B}(S)$

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(X_n \in G) \ge \mathbf{P}(X \in G).$$

При доказательстве теоремы 1′ следует воспользоваться тем, что

$$\mathbf{E} f(X) = \int_S f(s)\, dP, \qquad \mathbf{E}_n f(X_n) = \int_S f(s)\, dP_n.$$

Теорему 1′ также будем называть теоремой Александрова и при ссылке иметь ввиду именно ее.

В качестве следствия теоремы Александрова установим следующий результат для случайных величин. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ – случайные величины и $F_n(x) = \mathbf{P}_n(\xi_n \le x)$, $F(x) = \mathbf{P}(\xi \le x)$ при $x \in \mathbb{R}$. Говорят, что последовательность функций распределения $\{F_n\}$ *сходится в основном* к функции распределения F при $n \to \infty$, если $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, которые являются точками непрерывности функции F.

Теорема 2. *Пусть* $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ *– случайные величины. Тогда утверждение* $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ *при* $n \to \infty$ *равносильно сходимости в основном последовательности* $\{F_n\}$ *к* F.

Доказательство. 1) Предположим, что $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ при $n \to \infty$. Пусть x – точка непрерывности функции F, тогда

$$\mathbf{P}(\xi = x) = F(x) - F(x-0) = 0.$$

Положим $A = (-\infty, x]$. Ясно, что $\partial A = \{x\}$, поэтому $\mathbf{P}(\xi \in \partial A) = 0$ и по теореме Александрова

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(\xi_n \in A) = \mathbf{P}(\xi \in A) = F(x),$$

т.е. установлена сходимость в основном последовательности $\{F_n\}$ к F при $n \to \infty$.

2) Предположим теперь, что $\{F_n\}$ сходится в основном к F при $n \to \infty$. Покажем, что для произвольного открытого множества $G \in \mathcal{B}(S)$

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}_n \left(\xi_n \in G\right) \geq \mathbf{P}\left(\xi \in G\right). \qquad (19)$$

Множество G можно представить в виде объединения попарно непересекающихся интервалов $I_1, I_2, \ldots$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждого интервала I_k, $k \in \mathbb{N}$, подберем содержащийся в нем полуинтервал $I'_k = (a_k, b_k]$ так, чтобы точки a_k и b_k были точками непрерывности функции F и

$$\mathbf{P}\left(\xi \in I_k\right) \leq \mathbf{P}\left(\xi \in I'_k\right) + \varepsilon 2^{-k}. \qquad (20)$$

В силу сказанного

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n \left(\xi_n \in I'_k\right) = \lim_{n\to\infty} \left[\mathbf{P}_n \left(\xi_n \leq b_k\right) - \mathbf{P}_n \left(\xi_n \leq a_k\right)\right] =$$

$$= F\left(b_k\right) - F\left(a_k\right) = \mathbf{P}\left(\xi \in I'_k\right). \qquad (21)$$

По лемме Фату

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}_n \left(\xi_n \in G\right) = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_n \left(\xi_n \in I_k\right) \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}_n \left(\xi_n \in I_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}_n \left(\xi_n \in I'_k\right). \qquad (22)$$

Из соотношений (21)-(22) следует, что

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}_n \left(\xi_n \in G\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\xi \in I'_k\right).$$

Откуда, вспоминая (20), находим, что

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}_n \left(\xi_n \in G\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mathbf{P}\left(\xi \in I_k\right) - \varepsilon 2^{-k}\right] = \mathbf{P}\left(\xi \in G\right) - \varepsilon. \qquad (23)$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то из (23) вытекает требуемое соотношение (19). Из соотношения (19) по теореме Александрова следует, что $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.