Лекция 13

Сходимость к процессу Пуассона

Рассмотрим следующую *схему серий*. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ заданы независимые случайные величины $\xi_{1n}, \xi_{2,n}, \ldots, \xi_{n,n}$, имеющие одинаковое распределение: при $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\mathbf{P}\left(\xi_{k,n} = 1\right) = p_n, \qquad \mathbf{P}\left(\xi_{k,n} = 0\right) = q_n, \qquad p_n + q_n = 1.$$

Положим $S_{0,n} = 0$ и при $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$S_{k,n} = \sum_{i=1}^{k} \xi_{i,n},$$

при $t \in [0, 1]$

$$S_n(t) = S_{\lfloor nt \rfloor, n}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\{S_n(t),\ t \in [0,1]\} \Rightarrow \{\xi(t),\ t \in [0,1]\},$$

где $\{\xi(t),\ t \in [0,1]\}$ *– процесс Пуассона с интенсивностью* λ, *а символ* $\Rightarrow$ *означает сходимость в смысле конечномерных распределений.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные моменты времени $t_1, \ldots, t_m$ $(0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le 1)$, $m \in \mathbb{N}$. Ввиду соотношения (1) лекции 12 требуется показать, что при $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k S_n(t_k)\right) = \exp\left(\lambda \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) \left(e^{i\lambda_{k,m}} - 1\right)\right). \qquad (1)$$

При $k \in \{1, \ldots, m\}$ положим $\Delta_{k,n} = S_n(t_k) - S_n(t_{k-1})$ и заметим, что $S_n(t_k) = \sum_{l=1}^{k} \Delta_{l,n}$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k S_n(t_k) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{l=1}^{k} \Delta_{l,n} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m} \Delta_{k,n}.$$

Легко видеть, что процесс $\{S_n(t),\ t \in [0,1]\}$ имеет независимые приращения, поэтому независимы случайные величины $\Delta_{1,n}, \ldots, \Delta_{m,n}$ и, следовательно,

$$\mathbf{E} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k S_n(t_k)\right) = \mathbf{E} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m} \Delta_{k,n}\right) = \prod_{k=1}^{m} \mathbf{E} \exp\left(i \lambda_{k,m} \Delta_{k,n}\right). \qquad (2)$$

Напомним теорему Пуассона: при $n \to \infty$

$$S_{n,n} \xrightarrow{D} \eta,$$

где η – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ.

Заметим, что при $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\Delta_{k,n} = S_n(t_k) - S_n(t_{k-1}) = \sum_{i=\lfloor nt_{k-1} \rfloor+1}^{\lfloor nt_k \rfloor} \xi_{i,n}$$

и

$$\sum_{i=\lfloor nt_{k-1} \rfloor+1}^{\lfloor nt_k \rfloor} \xi_{i,n} \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\lfloor nt_k \rfloor - \lfloor nt_{k-1} \rfloor} \xi_{i,n}.$$

Положим $\widetilde{n} = \lfloor nt_k \rfloor - \lfloor nt_{k-1} \rfloor$, $\widetilde{p}_{\widetilde{n}} = p_n$ и $\widetilde{\xi}_{i,\widetilde{n}} = \xi_{i,n}$ при $i \in \{1, \ldots, \widetilde{n}\}$, тогда

$$\sum_{i=1}^{\lfloor nt_k \rfloor - \lfloor nt_{k-1} \rfloor} \xi_{i,n} = \sum_{i=1}^{\widetilde{n}} \widetilde{\xi}_{i,\widetilde{n}}$$

и $\lim_{n\to\infty} \widetilde{n}\widetilde{p}_{\widetilde{n}} = \lambda (t_k - t_{k-1}) > 0$. По теореме Пуассона при $\widetilde{n} \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{\widetilde{n}} \widetilde{\xi}_{i,\widetilde{n}} \xrightarrow{D} \widetilde{\eta},$$

где $\widetilde{\eta}$ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda (t_k - t_{k-1})$. Из сказанного вытекает, что при $n \to \infty$

$$\Delta_{k,n} \xrightarrow{D} \widetilde{\eta}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \exp (i\lambda_{k,m} \Delta_{k,n}) = \exp \left(\lambda (t_k - t_{k-1}) \left(e^{i\lambda_{k,m}} - 1 \right) \right). \tag{3}$$

Из соотношений (2) и (3) следует (1). Теорема доказана.

Сформулируем без доказательства достаточные условия сходимости по распределению случайных процессов с траекториями без разрывов второго рода.

Теорема 2. *Пусть* 1) $X, X_1, X_2, \ldots$ – *случайные процессы с траекториями из* $D[0,1]$ *и* $X_n \Rightarrow X$ при $n \to \infty$, 2) $\lim_{t\uparrow 1} X(t) = X(1)$ *п.н.*, 3) *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и всех* $s, u, t \in [0,1]$ $(s < u < t)$

$$\mathbf{E} \left| X_n(u) - X_n(s) \right|^a \left| X_n(t) - X_n(u) \right|^a \le C (t-s)^{1+b}, \tag{4}$$

где a, b, C – *некоторые положительные постоянные. Тогда* $X_n \xrightarrow{D} X$ *при* $n \to \infty$, *где символ* $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в пространстве* $D[0,1]$.

Положим при $t \in [0,1]$

$$\widetilde{S}_n(t) = S_n(t) + \delta_n(t), \tag{5}$$

где

$$\delta_n(t) = (nt - \lfloor nt \rfloor)\, \xi_{\lfloor nt \rfloor, n}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\left\{\widetilde{S}_n(t),\ t \in [0,1]\right\} \xrightarrow{D} \{\xi(t),\ t \in [0,1]\}.$$

где $\{\xi(t),\ t \in [0,1]\}$ *– конструктивный процесс Пуассона с интенсивностью* λ.

Доказательство. Проверим условия теоремы 2.

1) Ясно, что при $t \in [0,1]$

$$\mathbf{E}\delta_n(t) = (nt - \lfloor nt \rfloor)\, \mathbf{E}\xi_{\lfloor nt \rfloor, n} = (nt - \lfloor nt \rfloor)\, p_n \tag{6}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E}\delta_n(t) \le p_n. \tag{7}$$

Поскольку $\delta_n(t) \ge 0$, то из соотношения (7) по неравенству Маркова вытекает, что при $n \to \infty$

$$\delta_n(t) \xrightarrow{P} 0 \tag{8}$$

(символ $\xrightarrow{P}$ означает сходимость по вероятности). Из соотношений (5) и (8) следует, что один из двух процессов $\left\{\widetilde{S}_n(t),\ t \in [0,1]\right\}$ или $\{S_n(t),\ t \in [0,1]\}$ сходится при $n \to \infty$ в смысле конечномерных распределений к некоторому процессу, то и другой процесс сходится при $n \to \infty$ в смысле конечномерных распределений к тому же самому процессу. Откуда, вспоминая теорему 1, получаем, что при $n \to \infty$

$$\left\{\widetilde{S}_n(t),\ t \in [0,1]\right\} \Rightarrow \{\xi(t),\ t \in [0,1]\}.$$

2) Процесс Пуассона п.н. непрерывен в точке 1, поскольку п.н. точка 1 не может быть точкой восстановления коструктивного процесса Пуассона (докажите сами).

3) Заметим (см. (6)), что при $0 \le s < u \le 1$

$$\mathbf{E}\left|\widetilde{S}_n(u) - \widetilde{S}_n(s)\right| =$$

$$= \mathbf{E}\left(\sum_{i=\lfloor ns \rfloor + 1}^{\lfloor nu \rfloor} \xi_{i,n} + \delta_n(u) - \delta_n(s)\right) =$$

$$= (\lfloor nu \rfloor - \lfloor ns \rfloor)\, p_n + (nu - \lfloor nu \rfloor)\, p_n - (ns - \lfloor ns \rfloor)\, p_n =$$

$$= n(u-s)\, p_n.$$

Существует такое положительное число K, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$np_n \leq K.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} \left| \widetilde{S}_n (u) - \widetilde{S}_n (s) \right| \leq K (u - s) . \tag{9}$$

Аналогично при $0 \leq u < t \leq 1$

$$\mathbf{E} \left| \widetilde{S}_n (t) - \widetilde{S}_n (u) \right| \leq K (t - u) . \tag{10}$$

При $s, u, t \in [0, 1]$ $(s < u < t)$ случайные величины $\widetilde{S}_n (u) - \widetilde{S}_n (s)$ и $\widetilde{S}_n (t) - \widetilde{S}_n (u)$ независимы, поэтому

$$\mathbf{E} \left| \widetilde{S}_n (u) - \widetilde{S}_n (s) \right| \left| \widetilde{S}_n (t) - \widetilde{S}_n (u) \right| =$$

$$= \mathbf{E} \left| \widetilde{S}_n (u) - \widetilde{S}_n (s) \right| \mathbf{E} \left| \widetilde{S}_n (t) - \widetilde{S}_n (u) \right| .$$

Откуда, учитывая (9) и (10), находим, что

$$\mathbf{E} \left| \widetilde{S}_n (u) - \widetilde{S}_n (s) \right| \left| \widetilde{S}_n (t) - \widetilde{S}_n (u) \right| \leq K^2 (u - s) (t - u) \leq K^2 (t - s)^2 . \tag{11}$$

Соотношение (11) означает, что выполнено условие (4).

Теорема доказана.