Лекция 12

Процесс Пуассона

Определение 1. *Процессом Пуассона с интенсивностью* $\lambda > 0$ называется случайный процесс $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

1) $\xi(0) = 0$;

2) $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ является процессом с независимыми приращениями;

3) $\xi(t_2) - \xi(t_1) \sim \Pi_{\lambda(t_2 - t_1)}$ для произвольных моментов t_1, t_2 $(0 \leq t_1 < t_2)$.

Напомним, что в общем курсе было дано определение *конструктивного процесса Пуассона* как процесса восстановления, в котором время между соседними моментами восстановления распределено показательно с параметром λ. При этом доказывалось, что аксиомы 1)-3) выполнены. Отметим, что траектории конструктивного процесса Пуассона являются ступенчатыми неубывающими и непрерывными справа функциями.

Нетрудно проверить, что процесс Пуассона обладает *марковским свойством*: для каждого $t_0 \in (0, +\infty)$ процесс $\{\xi(t_0 + t) - \xi(t_0),\ t \geq 0\}$ является процессом Пуассона (с той же интенсивностью), причем не зависящим от прошлого, т.е. процесса $\{\xi(t),\ t \in [0, t_0]\}$).

Найдем характеристические функции конечномерных распределений процесса Пуассона. Положим при $m \in \mathbb{N}$ и $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

$$\psi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \mathbf{E} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \xi(t_k)\right).$$

Покажем, что

$$\psi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \exp\left(\lambda \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) \left(e^{i\lambda_{k,m}} - 1\right)\right), \qquad (1)$$

где $\lambda_{k,m} = \sum_{l=k}^{m} \lambda_l$ при $k \in \{1, \ldots, m\}$. Положим $\Delta_k = \xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$ при $k \in \{1, \ldots, m\}$. Заметим, что по аксиоме 2) случайные величины $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ независимы, причем $\Delta_k \sim \Pi_{\lambda(t_k - t_{k-1})}$ и $\xi(t_k) = \sum_{l=1}^{k} \Delta_l$ при $k \in \{1, \ldots, m\}$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \xi(t_k) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{l=1}^{k} \Delta_l = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m} \Delta_k$$

и

$$\mathbf{E} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \xi(t_k)\right) = \prod_{k=1}^{m} \mathbf{E} \exp\left(i \lambda_{k,m} \Delta_k\right). \qquad (2)$$

Заметим, что если $\eta \sim \Pi_a$, то при $u \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}\exp(iu\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} e^{-a} e^{iuk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(ae^{iu}\right)^k}{k!} e^{-a} = \exp\left(a\left(e^{iu}-1\right)\right).$$

Следовательно, при $k \in \{1,\ldots,m\}$

$$\mathbf{E}\exp(i\lambda_{k,m}\Delta_k) = \exp\left(\lambda\left(t_k - t_{k-1}\right)\left(e^{i\lambda_{k,m}}-1\right)\right). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует требуемое соотношение (1).

Используя формулу (1), установим независимо от общего курса существование процесса Пуассона.

Теорема 1. *Процесс Пуассона существует.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой Колмогорова о существовании процесса. Пусть $(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ – случайный вектор с характеристической функцией $\psi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$. Положим при $j \in \{1,\ldots,m\}$

$$\psi^{(j)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \psi_{t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_{j+1},\ldots\lambda_m).$$

Другими словами, $\psi^{(j)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ – характеристическая функция вектора $\left(\xi_1,\ldots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\ldots,\xi_m\right)$ в точке $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_{j+1},\ldots\lambda_m)$. Условие согласованности сводится к тому, что

$$\psi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\big|_{\lambda_j=0} = \psi^{(j)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m). \tag{4}$$

Ввиду (1)

$$\psi^{(j)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \exp\left(\lambda\sum_{k=1}^{m}\left(\widetilde{t}_k - \widetilde{t}_{k-1}\right)\left(e^{i\widetilde{\lambda}_{k,m-1}}-1\right)\right), \tag{5}$$

где

$$\widetilde{t}_k = \begin{cases} t_k, & k \in \{1,\ldots,j-1\} \\ t_{k+1}, & k \in \{j,\ldots,m-1\} \end{cases}, \quad \widetilde{\lambda}_k = \begin{cases} \lambda_k, & k \in \{1,\ldots,j-1\} \\ \lambda_{k+1}, & k \in \{j,\ldots,m-1\} \end{cases}$$

и $\widetilde{\lambda}_{k,m-1} = \sum_{l=k}^{m-1}\widetilde{\lambda}_l$ при $k \in \{1,\ldots,m-1\}$. Заметим, что при $\lambda_j = 0$

$$\lambda_{k,m} = \begin{cases} \widetilde{\lambda}_{k,m-1}, & k \in \{1,\ldots,j\} \\ \widetilde{\lambda}_{k-1,m-1}, & k \in \{j+1,\ldots,m\} \end{cases}. \tag{6}$$

Далее, ввиду (1) и (6)

$$\ln\psi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\big|_{\lambda_j=0} = \left(\lambda\sum_{k=1}^{m}\left(t_k - t_{k-1}\right)\left(e^{i\lambda_{k,m}}-1\right)\right)\Bigg|_{\lambda_j=0} =$$

$$= \lambda\sum_{k=1}^{j-1}\left(t_k - t_{k-1}\right)\left(e^{i\widetilde{\lambda}_{k,m-1}}-1\right) + \lambda\left(t_j - t_{j-1}\right)\left(e^{i\widetilde{\lambda}_{j,m-1}}-1\right) +$$

$$+\lambda\left(t_{j+1}-t_j\right)\left(e^{i\widetilde{\lambda}_{j,m-1}}-1\right)+\lambda\sum_{k=j+2}^{m}\left(t_k-t_{k-1}\right)\left(e^{i\widetilde{\lambda}_{k-1,m-1}}-1\right)=$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{j-1}\left(\widetilde{t}_k-\widetilde{t}_{k-1}\right)\left(e^{i\widetilde{\lambda}_{k,m-1}}-1\right)+\lambda\left(\widetilde{t}_j-\widetilde{t}_{j-1}\right)\left(e^{i\widetilde{\lambda}_{j,m-1}}-1\right)+$$

$$+\lambda\sum_{k=j+1}^{m-1}\left(\widetilde{t}_k-\widetilde{t}_{k-1}\right)\left(e^{i\widetilde{\lambda}_{k,m-1}}-1\right)=\ln\psi^{(j)}_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right),$$

что и доказывает соотношение (4). Теорема доказана.

Теперь обсудим свойства траекторий процесса Пуассона. Сначала заметим, что не существует модификации процесса Пуассона, траектории которой п.н. непрерывны. Докажем это от противного. Предположим, что такая модификация существует. Рассмотрим $A:=\{\xi(t)=0$ при всех $t\geq 0\}$. Поскольку $\mathbf{P}(A)\leq\mathbf{P}(\xi(t)=0)=\exp(-\lambda t)$ для произвольного $t>0$, то $\mathbf{P}(A)=0$. Далее, для произвольного $t>0$ случайная величина $\xi(t)$ п.н. принимает целочисленные значения. Если $\xi(t)=k$ при некоторого $k\in\mathbb{N}$ и некоторого $t>0$, то $\xi(s)=1/2$ при некотором $s\in(0,t)$ и, следовательно, $\xi(u)\in(1/4,3/4)$ при некотором положительном $u\in\mathbb{Q}$. Но событие $\bigcup_{u\in\mathbb{Q}}\{\xi(u)\in(1/4,3/4)\}$ невозможно. Приходим к противоречию. Итак, требуемое утверждение доказано.

Проверим, существует ли модификация процесса Пуассона, траектории которой принадлежат $D[0,+\infty)$. Сформулируем без доказательства следующее утверждение, принадлежащее Колмогорову и Ченцову.

Теорема 2. *Пусть случайный процесс $\{X(t),\ t\geq 0\}$ удовлетворяет условию: при всех $s,u,t\in[0,+\infty)$ $(s<u<t)$*

$$\mathbf{E}\left|X(u)-X(s)\right|^a\left|X(t)-X(u)\right|^a\leq C\left|t-s\right|^{1+b},\tag{7}$$

где a,b,C – некоторые положительные постоянные. Тогда у случайного процесса $\{X(t),\ t\geq 0\}$ существует модификация, траектории которой принадлежат $D[0,+\infty)$.

В качестве следствия теоремы 2 установим следующий результат.

Теорема 3. *У процесса Пуассона существует модификация, траектории которой п.н. принадлежат $D[0,+\infty)$.*

Доказательство. Заметим, что если $\{\xi(t),\ t\geq 0\}$ – процесс Пуассона, то при $0\leq t<u$

$$\mathbf{E}\left|\xi(u)-\xi(t)\right|=\mathbf{E}\left|\xi(u-t)\right|=\mathbf{E}\xi(u-t)=\lambda(u-t).$$

Следовательно, при $s,u,t\in[0,+\infty)$ $(s<u<t)$

$$\mathbf{E}\left|\xi(u)-\xi(s)\right|\left|\xi(t)-\xi(u)\right|=\lambda^2(u-s)(t-u)\leq\lambda^2(t-s)^2,$$

т.е. выполнено условие (7). Теорема доказана.

Если $\{\xi(t),\ t\geq 0\}$ – процесс Пуассона, траектории которого п.н. принадлежат $D[0,+\infty)$, то траектории процесса $\{\xi(t),\ t\geq 0\}$ п.н. не убывают. Действительно, для произвольной фиксированной пары точек $t_1,t_2\in\mathbb{R}$

$(0 \le t_1 < t_2)$ п.н. $\xi(t_2) - \xi(t_1) \ge 0$. Следовательно, п.н. сразу для всех пар $t_1, t_2 \in \mathbb{Q}$ $(0 \le t_1 < t_2)$ выполняется неравенство $\xi(t_2) - \xi(t_1) \ge 0$. Откуда, ввиду непрерывности справа п.в. траекторий, указанное неравенство п.н. выполняется сразу для всех пар $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(0 \le t_1 < t_2)$. Аналогично показывается, что п.н. значения функции $\xi(t)$, $t \ge 0$, а также ее пределы слева являются целыми и неотрицательными.

Лемма 1. *Если траектории процесса Пуассона* $\{\xi(t), \ t \ge 0\}$ *п.н. принадлежат* $D[0, +\infty)$, *то п.н. величина скачка в каждой точке разрыва равна* 1.

Доказательство. Зафиксируем произвольный отрезок $[a, b] \subset [0, +\infty)$. Известно, что у функции, принадлежащей $D[0, +\infty)$, число разрывов на отрезке $[a, b]$, превосходящих любое наперед заданное число, конечно. Обозначим $\mu(a, b)$ число точек разрыва процесса $\{\xi(t), \ t \ge 0\}$ на отрезке $[a, b]$, в которых скачки превосходят 1. В силу сказанного п.н. $\mu(a, b) < +\infty$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Положим $\delta = (b - a)/m$ и $t_k = 1 + \delta k$ при $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Положим

$$\sigma_m(a, b) = \sum_{k=1}^{m} I_{\{\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) > 1\}},$$

где I_A – индикатор случайного события A.

Поскольку траектории процесса $\{\xi(t), \ t \ge 0\}$ п.н. не убывают, то из неравенства $\mu(a, b) \ge 1$ следует, что $\sigma_m(a, b) \ge 1$. Теперь заметим, что

$$\mathbf{E}\sigma_m(a, b) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) > 1) = \sum_{k=1}^{m} \left(1 - e^{-\lambda\delta} - \lambda\delta e^{-\lambda\delta}\right) =$$

$$= m\left(1 - e^{-\lambda\delta} - \lambda\delta e^{-\lambda\delta}\right) = m\frac{\lambda^2\delta^2}{2}(1 + O(\delta)) = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Следовательно, с учетом неравенства Маркова

$$\mathbf{P}(\mu(a, b) \ge 1) \le \mathbf{P}(\sigma_m(a, b) \ge 1) \le \mathbf{E}\sigma_m(a, b)$$

и, значит,

$$\mathbf{P}(\mu(a, b) \ge 1) \le \limsup_{m \to \infty} \mathbf{E}\sigma_m(a, b) = 0.$$

Итак, п.н. на отрезке $[a, b]$ в точках разрыва величина каждого скачка не превосходит 1 и, следовательна, равна 1. Ввиду произвольности отрезка $[a, b]$ это справедливо и на всей полупрямой $[0, +\infty)$. Лемма доказана.

Теорема 4. *У процесса Пуассона существует модификация, являющаяся конструктивным процессом Пуассона.*

Доказательство. Пусть $\{\xi(t), \ t \ge 0\}$ – процесс Пуассона, траектории которого п.н. принадлежат $D[0, +\infty)$. Положим при $k \in \mathbb{N}$

$$T_k = \inf\{t \ge 0 : \ \xi(t) \ge k\}.$$

Так как событие $\{\xi(t) = 0 \text{ при всех } t \ge 0\}$ невозможно, то п.н. $T_1 < +\infty$. Функция $\xi(t)$, $t \ge 0$, п.н. непрерывна справа, следовательно, п.н. $\xi(T_1) \ge 1$ и $\xi(t) = 0$ при $t < T_1$. Следовательно, п.н. T_1 – точка разрыва, причем величина разрыва совпадает с $\xi(T_1)$. В силу леммы 1 п.н. $\xi(T_1) \notin \{2, 3, \ldots\}$. Итак, п.н. $\xi(T_1) = 1$. Отметим также, что при $u > 0$

$$\mathbf{P}(T_1 > u) = \mathbf{P}(\xi(u) = 0) = e^{-\lambda u}.$$

Рассмотрим случайный процесс $\left\{\xi^{(1)}(t),\ t \geq 0\right\}$, где при $t \geq 0$

$$\xi^{(1)}(t) = \xi(T_1 + t) - \xi(T_1).$$

Оказывается, процесс $\left\{\xi^{(1)}(t),\ t \geq 0\right\}$ является процессом Пуассона с той же интенсивностью λ, причем этот процесс не зависит от случайной величины T_1. Ограничимся доказательством того, что случайная величина $\xi^{(1)}(t)$ при $t > 0$ не зависит от T_1 и $\xi^{(1)}(t) \stackrel{d}{=} \xi(t)$. А для этого, в свою очередь, достаточно показать, что при $s, v > 0$

$$\mathbf{E}\left(e^{-s\xi^{(1)}(t)};\ T_1 \leq v\right) = \varphi_t(s)\,\mathbf{P}(T_1 \leq v), \tag{8}$$

где $\varphi_t(s) = \mathbf{E}e^{-s\xi(t)}$ – преобразование Лапласа случайной величины $\xi(t)$.

Заметим, что

$$\mathbf{E}\left(e^{-s\xi^{(1)}(t)};\ T_1 \leq v\right) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{E}\left(e^{-s\xi^{(1)}(t)};\ t_j < T_1 \leq t_{j+1}\right), \tag{9}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $\delta = v/m$, $t_j = j\delta$ при $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Далее, если $t_j < T_1 \leq t_{j+1}$, то

$$\xi^{(1)}(t) = \xi(T_1 + t) - \xi(T_1) \geq \xi(t_j + t) - \xi(t_{j+1})$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E}\left(e^{-s\xi^{(1)}(t)};\ t_j < T_1 \leq t_{j+1}\right) \leq \mathbf{E}\left(e^{-s(\xi(t_j+t)-\xi(t_{j+1}))};\ t_j < T_1 \leq t_{j+1}\right). \tag{10}$$

Если m достаточно велико, то $t_j + t > t_{j+1}$ и по марковскому свойству процесса Пуассона

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(e^{-s(\xi(t_j+t)-\xi(t_{j+1}))};\ t_j < T_1 \leq t_{j+1}\right) = \\
&= \mathbf{E}e^{-s(\xi(t_j+t)-\xi(t_{j+1}))}\mathbf{P}(t_j < T_1 \leq t_{j+1}) = \\
&= \mathbf{E}e^{-s\xi(t_j+t-t_{j+1})}\mathbf{P}(t_j < T_1 \leq t_{j+1}) = \\
&= \varphi_{t-\delta}(s)\,\mathbf{P}(t_j < T_1 \leq t_{j+1}).
\end{aligned} \tag{11}$$

Из соотношений (9)-(11) находим, что при достаточно больших m

$$\mathbf{E}\left(e^{-s\xi^{(1)}(t)};\ T_1 \leq v\right) \leq \sum_{j=0}^{m-1} \varphi_{t-\delta}(s)\,\mathbf{P}(t_j < T_1 \leq t_{j+1}) =$$

$$= \varphi_{t-\delta}(s)\,\mathbf{P}(T_1 \leq v).$$

Откуда, переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем,что

$$\mathbf{E}\left(e^{-s\xi^{(1)}(t)};\ T_1 \leq v\right) \leq \varphi_t(s)\,\mathbf{P}(T_1 \leq v). \tag{12}$$

Аналогично можно показать, что

$$\mathbf{E}\left(e^{-s\xi^{(1)}(t)};\ T_1 \le v\right) \ge \varphi_t(s)\,\mathbf{P}(T_1 \le v)\,. \qquad (13)$$

Из (12) и (13) следует требуемое соотношение (8).

Положим

$$T_1^{(1)} = \inf\left\{t \ge 0 : \xi^{(1)}(t) \ge 1\right\}.$$

Момент $T_1^{(1)}$ означает то же самое для процесса Пуассона $\left\{\xi^{(1)}(t)\,,\ t \ge 0\right\}$, что и момент T_1 для процесса $\{\xi(t)\,,\ t \ge 0\}$. Поэтому п.н. $\xi^{(1)}\left(T_1^{(1)}\right) = 1$ и $\mathbf{P}\left(T_1^{(1)} > v\right) = e^{-\lambda v}$ при $v > 0$. Следовательно, п.н. $T_2 = T_1 + T_1^{(1)}$. Заметим, что случайные величины T_1 и $T_1^{(1)}$ независимы, поскольку случайная величина $T_1^{(1)}$ определяется по процессу $\left\{\xi^{(1)}(t)\,,\ t \ge 0\right\}$, который не зависит от случайной величины T_1.

Рассмотрим случайный процесс $\left\{\xi^{(2)}(t)\,,\ t \ge 0\right\}$, где при $t \ge 0$

$$\xi^{(2)}(t) = \xi^{(1)}\left(T_1^{(1)} + t\right) - \xi\left(T_1^{(1)}\right).$$

Как и прежде, можно показать, что процесс $\left\{\xi^{(2)}(t)\,,\ t \ge 0\right\}$ является процессом Пуассона с той же интенсивностью λ, причем этот процесс не зависит от случайных величин T_1 и T_2. Положим

$$T_1^{(2)} = \inf\left\{t \ge 0 : \xi^{(1)}(t) \ge 1\right\}.$$

Аналогично предыдущему показывается, что п.н. $\xi^{(2)}\left(T_1^{(2)}\right) = 1$ и, следовательно, п.н. $T_3 = T_1 + T_1^{(1)} + T_1^{(2)}$, причем случайные величины T_1, $T_1^{(1)}$ и $T_1^{(2)}$ независимы и одинаково распределены и т.д.

Итак, $\xi(t) = 0$ при $t \in [0, T_1)$, $\xi^{(1)}(t) = 0$ при $t \in \left[0, T_1^{(1)}\right)$, $\xi^{(2)}(t) = 0$ при $t \in \left[0, T_1^{(2)}\right)$ и т.д., причем

$$\xi(T_1) = \xi^{(1)}\left(T_1^{(1)}\right) = \xi^{(2)}\left(T_1^{(2)}\right) = \ldots = 1.$$

Следовательно, $\xi(t) = 0$ при $t \in [0, T_1)$, $\xi(t) = 1$ при $t \in [T_1, T_2)$, $\xi(t) = 2$ при $t \in [T_2, T_3)$ и т.д. Таким образом, процесс $\{\xi(t)\,,\ t \ge 0\}$, удовлетворяющий аксиомам 1)-3) и имеющий непрерывные справа траектории, является процессом восстановления, причем промежутки времени между последовательными восстановлениями распределены показательно с параметром λ. Теорема доказана.