Лекция 7

Принцип инвариантности Донскера-Прохорова

Развитая ранее теория применима к различным вероятностным моделям. В качестве первой такой модели рассмотрим случайное блуждание.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. *Случайным блужданием* называется последовательность сумм

$$S_0 = 0,\ S_n = X_1 + \ldots + X_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Случайная величина X_n называется n-м *шагом* случайного блуждания. Числовые характеристики $\mathbf{E}X_1,\ \mathbf{D}X_1$ называются соответственно *сносом* и *шаговой дисперсией* случайного блуждания.

Отметим, что случайное блуждание обладает *марковским свойством*: для любого $n_0 \in \mathbb{N}$ случайная последовательность $\{S_{n_0+n} - S_{n_0},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ имеет такое же распределение, как $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, и не зависит от случайного вектора $\{S_0, S_1, \ldots, S_{n_0}\}$. Этим же свойством обладает броуновское движение W: для каждого $t_0 \in (0, +\infty)$ процесс $\{W(t_0 + t) - W(t_0),\ t \geq 0\}$ является броуновским движением, причем не зависящим от прошлого, т.е. процесса $\{W(t),\ t \in [0, t_0]\}$).

Многие результаты классической теории вероятностей посвящены случайному блужданию с нулевым сносом и конечной положительной шаговой дисперсией σ^2. Примером является центральная предельная теорема: при $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N,$$

где $N \sim N(0,1)$, т.е. N является случайной величиной со стандартным нормальным распределением.

Положим

$$Y_n(t) := \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}},\ t \in [0,1].$$

Заметим, что Y_n является случайным процессом с траекториями из $D[0,1]$, сохраняющим всю информацию об отрезке блуждания $S_0, S_1, \ldots, S_n$. При $t \in (0,1]$ получаем, что при $n \to \infty$

$$Y_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \frac{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sqrt{t}N.$$

Далее (символ $\stackrel{d}{=}$ означает совпадение распределений),

$$\sqrt{t}N \sim N(0,t) \Longrightarrow \sqrt{t}N \stackrel{d}{=} W(t).$$

Это наводит на мысль, что $Y_n \xrightarrow{D} W$ при $n \to \infty$. Следующий результат получил название *принципа инвариантности Донскера-Прохорова*.

Теорема 1. *Если* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, *то при* $n \to \infty$

$$Y_n \xrightarrow{D} W,$$

где $W = \{W(t),\ t \in [0,1]\}$ *– стандартное броуновское движение, знак* $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в пространстве* $D[0,1]$ *с топологией Скорохода.*

Доказательство разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *и* $\{\eta_n\}$ *– последовательности случайных величин, причем* ξ_n, η_n *– независимые случайные величины при каждом* $n \in \mathbb{N}$. *Если* $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{D} \eta$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\{\xi_n, \eta_n\} \xrightarrow{D} \left\{\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}\right\},$$

где $\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}$ *– независимые случайные величины, причем* $\widetilde{\xi} \stackrel{d}{=} \xi$, $\widetilde{\eta} \stackrel{d}{=} \eta$.

Доказательство. Если x – точка непрерывности функции $F(x) := \mathbf{P}(\xi \le x)$, а y – точка напрерывности функции $G(y) =: \mathbf{P}(\eta \le y)$, то при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\xi_n \le x,\ \eta_n \le y) = \mathbf{P}(\xi_n \le x)\,\mathbf{P}(\eta_n \le y) \to F(x)\,G(y).$$

Отсюда следует, что если (x, y) – точка непрерывности функции $F(x)\,G(y) = \mathbf{P}\left(\widetilde{\xi} \le x,\ \widetilde{\eta} \le y\right)$, то при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\xi_n \le x,\ \eta_n \le y) \to \mathbf{P}\left(\widetilde{\xi} \le x,\ \widetilde{\eta} \le y\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Последовательность случайных процессов* Y_n *сходится при* $n \to \infty$ *в смысле конечномерных распределений к процессу* W.

Доказательство. Сходимость одномерных распределений уже установлена. Пусть $0 < t_1 < t_2 \le 1$. Поскольку

$$Y_n(t_2) - Y_n(t_1) = \frac{S_{\lfloor nt_2 \rfloor} - S_{\lfloor nt_1 \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}},$$

то случайная величина $Y_n(t_2) - Y_n(t_1)$ не зависит от $Y_n(t_1)$. Далее, при $n \to \infty$

$$Y_n(t_2) - Y_n(t_1) = \frac{S_{\lfloor nt_2 \rfloor} - S_{\lfloor nt_1 \rfloor}}{\sigma\sqrt{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor}} \frac{\sqrt{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sqrt{t_2 - t_1}N$$

Но

$$\sqrt{t_2 - t_1}N \sim N(0, t_2 - t_1) \Longrightarrow \sqrt{t_2 - t_1}N \stackrel{d}{=} W(t_2) - W(t_1).$$

В силу леммы 1 при $n \to \infty$

$$\{Y_n(t_1), Y_n(t_2) - Y_n(t_1)\} \xrightarrow{D} \{W(t_1), W(t_2) - W(t_1)\}.$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$\{Y_n(t_1), Y_n(t_2)\} \xrightarrow{D} \{W(t_1), W(t_2)\}.$$

Аналогично рассматривается случай распределений размерности 3 и больше. Лемма доказана.

Напомним, что $w_x(\delta)$ – модуль непрерывности функции $x \in D[0,1]$.

Лемма 3. *Пусть* $\delta = 1/m$, *где* m *- натуральное число, и* $t_k = \delta k$, $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, *тогда для любого* $x \in D[0,1]$ *справедливо неравенство*

$$w_x(\delta) \le 3 \max_k \sup_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |x(s) - x(t_k)|.$$

Доказательство. Пусть s, t таковы, что $0 \le s \le t \le 1$ и $|s - t| \le \delta$. Тогда либо $s, t \in [t_k, t_{k+1}]$ для некоторого $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ и, следовательно,

$$|x(s) - x(t)| \le |x(s) - x(t_k)| + |x(t) - x(t_k)| \le$$

$$\le 2 \max_k \sup_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |x(s) - x(t_k)|;$$

либо $s \in [t_k, t_{k+1}]$, $t \in [t_{k+1}, t_{k+2}]$ для некоторого $k \in \{0, 1, \ldots, m-2\}$ и, следовательно,

$$|x(s) - x(t)| \le |x(s) - x(t_k)| + |x(t_k) - x(t_{k+1})| + |x(t_{k+1}) - x(t)| \le$$

$$\le 3 \max_k \sup_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |x(s) - x(t_k)|.$$

Поэтому если $|s - t| \le \delta$, то

$$|x(s) - x(t)| \le 3 \max_k \sup_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |x(s) - x(t_i)|.$$

Следовательно,

$$w_x(\delta) \le 3 \max_k \sup_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |x(s) - x(t_k)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *тогда справедливо неравенство Колмогорова*: *при любом* $\lambda > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \le i \le n} |S_i| \ge \lambda \sigma \sqrt{n}\right) \le 2\mathbf{P}\left(|S_n| \ge \left(\lambda - \sqrt{2}\right) \sigma \sqrt{n}\right).$$

Доказательство. Пусть τ – момент первого достижения случайной последовательностью $\{|S_i|\,,\ i \in \mathbb{N}_0\}$ полуоси $[\lambda\sigma\sqrt{n}, +\infty)$. Тогда

$$\left\{\max_{1 \le i \le n} |S_i| \ge \lambda \sigma \sqrt{n}\right\} = \bigcup_{m=1}^{n} \{\tau = m\},$$

причем события справа являются попарно несовместными. Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \le i \le n} |S_i| \ge \lambda \sigma \sqrt{n}\right) = \mathbf{P}\left(\max_{1 \le i \le n} |S_i| \ge \lambda \sigma \sqrt{n},\ \ |S_n| \ge \left(\lambda - \sqrt{2}\right) \sigma \sqrt{n}\right) +$$

$$+\mathbf{P}\left(\max_{1\le i\le n}|S_i|\ge\lambda\sigma\sqrt{n},\ \ |S_n|<\left(\lambda-\sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{n}\right)\le$$

$$\le\mathbf{P}\left(|S_n|\ge\left(\lambda-\sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{n}\right)+\sum_{m=1}^{n-1}\mathbf{P}\left(|S_n|<\left(\lambda-\sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{n},\ \tau=m\right).$$

Теперь заметим, что

$$\mathbf{P}\left(|S_n|<\left(\lambda-\sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{n},\ \tau=m\right)\le\mathbf{P}\left(\tau=m,\ \ |S_n-S_m|>\sqrt{2}\sigma\sqrt{n}\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\tau=m\right)\mathbf{P}\left(|S_n-S_m|>\sqrt{2}\sigma\sqrt{n}\right)$$

(здесь учтено, что случайные события $\{\tau=m\}$ и $\left\{|S_n-S_m|>\sqrt{2}\sigma\sqrt{n}\right\}$ являются независимыми). По неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}\left(|S_n-S_m|>\sqrt{2}\sigma\sqrt{n}\right)\le\frac{\mathbf{E}\left(S_n-S_m\right)^2}{2\sigma^2 n}=\frac{\left(n-m\right)\sigma^2}{2\sigma^2 n}=\frac{n-m}{2n}\le\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{n-1}\mathbf{P}\left(|S_n|<\left(\lambda-\sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{n},\ \tau=m\right)\le$$

$$\le\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\mathbf{P}\left(\tau=m\right)\le\frac{1}{2}\mathbf{P}\left(\max_{1\le i\le n}|S_i|\ge\lambda\sigma\sqrt{n}\right).$$

Итак,

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\le i\le n}|S_i|\ge\lambda\sigma\sqrt{n}\right)\le$$

$$\le\mathbf{P}\left(|S_n|\ge\left(\lambda-\sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{n}\right)+\frac{1}{2}\mathbf{P}\left(\max_{1\le i\le n}|S_i|\ge\lambda\sigma\sqrt{n}\right),$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 5. *В условиях теоремы* 1 *при любом* $\varepsilon>0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta\right)\ge\varepsilon\right)=0.$$

Доказательство. Из леммы 3 следует, что

$$\mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta\right)\ge\varepsilon\right)\le\sum_{k=0}^{m-1}\mathbf{P}\left(\sup_{s\in[t_k,t_{k+1}]}|Y_n\left(s\right)-Y_n\left(t_k\right)|\ge\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

В силу неравенства Колмогорова

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s\in[t_k,t_{k+1}]}|Y_n\left(s\right)-Y_n\left(t_k\right)|\ge\frac{\varepsilon}{3}\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\sup_{s\in[t_k,t_{k+1}]}\left|S_{\lfloor ns\rfloor}-S_{\lfloor nt_k\rfloor}\right|\ge\frac{\varepsilon}{3}\sigma\sqrt{n}\right)=$$

$$= \mathbf{P}\left(\max_{\lfloor nt_k\rfloor \le i \le \lfloor nt_{k+1}\rfloor}\left|S_i - S_{\lfloor nt_k\rfloor}\right| \ge \frac{\varepsilon}{3}\sigma\sqrt{n}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\max_{0 \le i \le \lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\left|S_i\right| \ge \frac{\varepsilon}{3}\sigma\sqrt{n}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\max_{0 \le i \le \lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\left|S_i\right| \ge \lambda_n\sigma\sqrt{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right) \le$$

$$\le 2\mathbf{P}\left(\left|S_{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right| \ge \left(\lambda_n - \sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right),$$

где

$$\lambda_n = \frac{\varepsilon}{3}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \ge \varepsilon\right) \le 2\sum_{k=0}^{m-1}\mathbf{P}\left(\left|S_{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right| \ge \left(\lambda_n - \sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right).$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \varepsilon/\left(3\sqrt{\delta}\right)$, то по центральной предельной теореме при $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|S_{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right| \ge \left(\lambda_n - \sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(x_\delta\right)\right),$$

где $x_\delta = \varepsilon/\left(3\sqrt{\delta}\right) - \sqrt{2}$. Таким образом,

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \ge \varepsilon\right) \le 4\sum_{k=0}^{m-1}\left(1 - \Phi\left(x_\delta\right)\right) = \frac{4}{\delta}\left(1 - \Phi\left(x_\delta\right)\right). \tag{1}$$

Заметим, что при $x > 0$

$$1 - \Phi(x) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2}.$$

В самом деле,

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-u^2/2}du = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{1}{u}de^{-u^2/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{1}{u^2}e^{-u^2/2}du \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2}.$$

Таким образом, при достаточно малом δ

$$1 - \Phi\left(x_\delta\right) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}x_\delta}e^{-x_\delta^2/2}. \tag{2}$$

Из соотношений (1), (2) находим, что

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \ge \varepsilon\right) \le \frac{4}{\sqrt{2\pi}\delta x_\delta}e^{-x_\delta^2/2}.$$

Очевидно, предел правой части равен 0 при $\delta \to 0$, что доказывает лемму.

Из установленных лемм 2 и 5 по теореме о C-сходимости получаем утверждение теоремы 1.