## Лекция 5

## Условия сходимости по распределению случайных процессов с непрерывными траекториями

Применим изложенную *теорию сходимости по распределению* к случайным процессам. Как известно, случайный процесс – это случайный элемент, отображающий вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в измеримое пространство $(R\,[0,+\infty)\,, \mathcal{G})$. Вместо временной полуоси $[0,+\infty)$ будем для простоты изложения рассматривать отрезок $[0,1]$. Предположим, что траектории случайного процесса $X$ непрерывны на $[0,1]$, тогда $X$ является случайным элементом со значениями в измеримом пространстве $C\,[0,1]$ с заданной на нем цилиндрической $\sigma$-алгеброй. В пространстве $C\,[0,1]$ можно задать *метрику равномерной сходимости*: для $x, y \in C\,[0,1]$

$$\rho_{\text{равн}}\,(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |x\,(t) - y\,(t)|\,,$$

причем с этой метрикой пространство $C\,[0,1]$ является сепарабельным метрическим пространством. Обозначим $\mathcal{B}\,(C\,[0,1])$ борелевскую $\sigma$-алгебру относительно введенной метрики. Нетрудно доказать, что $\mathcal{B}\,(C\,[0,1])$ совпадает с цилиндрической $\sigma$-алгеброй пространства $C\,[0,1]$. Таким образом, случайный процесс с непрерывными траекториями является случайным элементом со значениями в пространстве $(C\,[0,1]\,, \mathcal{B}\,(C\,[0,1]))$ и, значит, мы имеем право использовать теорию сходимости по распределению.

Введем *модуль непрерывности* для $x \in C\,[0,1]$:

$$w_x\,(\delta) = \sup_{t,s\colon\, |t-s|\le\delta} |x\,(t) - x\,(s)|\,,$$

где $\delta$ – положительное число $(t, s \in [0,1])$.

**Лемма 1.** *Если* $x \in C\,[0,1]$, *то* $\lim_{\delta\to 0} w_x\,(\delta) = 0$.

*Доказательство* следует из того, что функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\delta = 1/m$ и $x \in C\,[0,1]$. Положим $s_k = k\delta$, $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Введем *кусочно-линейное приближение* $x^{(\delta)}$ для $x$:

$$x^{(\delta)}\,(t) = x\,(s_k) + \frac{t - s_k}{\delta}\,[x\,(s_{k+1}) - x\,(s_k)]\,,$$

если $t \in [s_k, s_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

**Лемма 2.** *Если* $x \in C\,[0,1]$, *то при* $\delta > 0$ *справедливо неравенство*

$$\rho_{\text{равн}}\left(x, x^{(\delta)}\right) \le 2w_x\,(\delta)\,,$$

*поэтому*

$$\lim_{\delta\to 0} \rho_{\text{равн}}\left(x, x^{(\delta)}\right) = 0.$$

*Доказательство.* Пусть $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Заметим, что $x(s_k) = x^{(\delta)}(s_k)$, поэтому при $t \in [s_k, s_{k+1}]$

$$\left|x(t) - x^{(\delta)}(t)\right| \le |x(t) - x(s_k)| + \left|x^{(\delta)}(s_k) - x^{(\delta)}(t)\right| \le$$

$$\le |x(t) - x(s_k)| + \left|x^{(\delta)}(s_k) - x^{(\delta)}(s_{k+1})\right| =$$

$$= |x(t) - x(s_k)| + |x(s_k) - x(s_{k+1})| \le 2w_x(\delta).$$

Следовательно, при всех $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

$$\sup_{t \in [s_k, s_{k+1}]} \left|x(t) - x^{(\delta)}(t)\right| \le 2w_x(\delta)$$

и, значит,

$$\sup_{t \in [0,1]} \left|x(t) - x^{(\delta)}(t)\right| \le 2w_x(\delta).$$

Лемма доказана.

Зададим отображение $g^{(m)} : \mathbb{R}^{m+1} \to C[0,1]$. Произвольному вектору $\overline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ сопоставим функцию $g^{(m)}(\overline{x}) \in C[0,1]$:

$$\left(g^{(m)}(\overline{x})\right)(t) = x_k + \frac{t - s_k}{\delta}(x_{k+1} - x_k),$$

если $t \in [s_k, s_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Очевидно, что отображение $g^{(m)}$ является непрерывным и

$$x^{(\delta)} = g^{(m)}(x(s_0), x(s_1), \ldots, x(s_m)). \tag{1}$$

**Определение 1**. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – произвольные случайные процессы. Говорят, что последовательность процессов $\{X_n\}$ сходится при $n \to \infty$ *в смысле конечномерных распределений* к процессу $X$, если для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и произвольных моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$ при $n \to \infty$

$$(X_n(t_1), X_n(t_2), \ldots, X_n(t_m)) \xrightarrow{D} (X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_m)).$$

**Теорема 1** (Прохоров). *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные процессы с непрерывными на отрезке $[0,1]$ траекториями. Если последовательность процессов $\{X_n\}$ сходится при $n \to \infty$ в смысле конечномерных распределений к процессу $X$ и для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathbf{P}_n(w_{X_n}(\delta) \ge \varepsilon) = 0, \tag{2}$$

*то $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \to \infty$ (по распределению в пространстве $C[0,1]$). Наоборот, из сходимости по распределению в $C[0,1]$ последовательности процессов с непрерывными траекториями следуют сходимость в смысле конечномерных распределений и условие (2).*

*Доказательство.* Начнем с первого утверждения. Пусть $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$. Положим

$$Y_{m,n} = X_n^{(\delta)},\ Y_m = X^{(\delta)}.$$

По лемме 2

$$\rho_{\text{равн}}\left(Y_{m,n}; X_n\right) \leq 2w_{X_n}\left(\delta\right).$$

Поэтому ввиду (2)

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathbf{P}_n \left(\rho_{\text{равн}}\left(Y_{m,n}; X_n\right) \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{3}$$

В силу соотношения (1)

$$X_n^{(\delta)} = g^{(m)}\left(X_n\left(s_0\right), X_n\left(s_1\right), \ldots, X_n\left(s_m\right)\right),$$

$$X^{(\delta)} = g^{(m)}\left(X\left(s_0\right), X\left(s_1\right), \ldots, X\left(s_m\right)\right),$$

где $g^{(m)}$ является непрерывным отображением $\mathbb{R}^{m+1}$ в $C\left[0,1\right]$, а $s_k = k\delta$, $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. По условию теоремы при $n \to \infty$

$$\left(X_n\left(s_0\right), X_n\left(s_1\right), \ldots, X_n\left(s_m\right)\right) \xrightarrow{D} \left(X\left(s_0\right), X\left(s_1\right), \ldots, X\left(s_m\right)\right).$$

Поэтому на основании теоремы 1 лекции 4 при $n \to \infty$

$$X_n^{(\delta)} = g^{(m)}\left(X_n\left(s_0\right), X_n\left(s_1\right), \ldots, X_n\left(s_m\right)\right) \xrightarrow{D}$$

$$g^{(m)}\left(X\left(s_0\right), X\left(s_1\right), \ldots, X\left(s_m\right)\right) = X^{(\delta)}.$$

Итак, при $n \to \infty$

$$Y_{m,n} \xrightarrow{D} Y_m. \tag{4}$$

По лемме 2

$$\lim_{m \to \infty} \rho_{\text{равн}}\left(Y_m, X\right) = 0,$$

но из сходимости случайных элементов п.н. следует их сходимость по распределению (докажите), поэтому при $m \to \infty$

$$Y_m \xrightarrow{D} X. \tag{5}$$

Из соотношений (3)-(5) по теореме 2 лекции 4 получаем, что при $n \to \infty$

$$X_n \xrightarrow{D} X.$$

Докажем обратное утверждение. Отображения

$$x \to w_x\left(\delta\right), \tag{6}$$

$$x \to \left(x\left(t_1\right), x\left(t_2\right), \ldots, x\left(t_m\right)\right) \tag{7}$$

являются непрерывными на $C\left[0,1\right]$ (здесь $m$ – произвольное натуральное число, а $t_1, t_2, \ldots, t_m$ – произвольные числа из отрезка $[0,1]$).

Из непрерывности отображения (6) по теореме 1 лекции 4 получаем сходимость по распределению случайных величин: при $n \to \infty$

$$w_{X_n}\left(\delta\right) \xrightarrow{D} w_X\left(\delta\right).$$

Учитывая критерий сходимости по распределению случайных величин в терминах функций распределения, находим что для всех $\varepsilon > 0$ (за исключением, быть может, некоторого счетного множества)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n \left(w_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(w_X(\delta) \geq \varepsilon\right).$$

Траектории процесса $X$ непрерывны и, значит, по лемме 1

$$\lim_{\delta\to 0} \mathbf{P}\left(w_X(\delta) \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Таким образом, для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n \left(w_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon\right) = 0,$$

т.е. условие (2) выполнено.

Из непрерывности отображения (7) получаем, что при $n \to \infty$

$$\left(X_n(t_1), \ldots, X_n(t_m)\right) \xrightarrow{D} \left(X(t_1), \ldots, X(t_m)\right), \tag{8}$$

т.е. имеет место сходимость конечномерных распределений. Теорема доказана.

**Задача 1.** Показать, что соотношение (8) равносильно тому, что для произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_m$ при $n \to \infty$

$$C_1 X_n(t_1) + \ldots + C_m X_n(t_m) \xrightarrow{D} C_1 X(t_1) + \ldots + C_m X(t_m).$$

Если случайные процессы с непрерывными траекториями $X_n$ сходятся при $n \to \infty$ по распределению в пространстве $C[0,1]$ к процессу с непрерывными траекториями $X$, то по теореме 1 лекции 4 выполняется сходимость по распределению

$$f(X_n) \xrightarrow{D} f(X) \tag{9}$$

для произвольного непрерывного функционала (т.е. числовой функции) $f$, заданного на $C[0,1]$.

**Утверждение 1**. *Пусть процессы с непрерывными траекториями $X_n$ сходятся при $n \to \infty$ по распределению в пространстве $C[0,1]$ к процессу с непрерывными траекториями $X$, тогда при $n \to \infty$*

$$\sup_{t\in[0,1]} X_n(t) \xrightarrow{D} \sup_{t\in[0,1]} X(t).$$

*Доказательство.* Рассмотрим следующее отображение $f$ пространства $C[0,1]$ в $\mathbb{R}$: $f(x) = \sup_{t\in[0,1]} x(t)$, $x \in C[0,1]$. Оно является непрерывным при всех $x \in C[0,1]$, поскольку

$$\left|\sup_{t\in[0,1]} x(t) - \sup_{t\in[0,1]} y(t)\right| \leq \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|, \ x, y \in C[0,1].$$

По теореме 1 лекции 4, учитывая непрерывность отображения $f$, получаем требуемое утверждение.

Во многом вся ценность теоремы Прохорова объясняется тем, что она дает достаточные условия для сходимости (9). Переформулируем теорему Прохорова в терминах сходимости по распределению непрерывных функционалов от процессов с непрерывными траекториями.

**Теорема 2**. *Пусть* $X, X_1, X_2, \ldots$ – *случайные процессы с непрерывными на отрезке* $[0,1]$ *траекториями. Сходимость* $f(X_n) \xrightarrow{D} f(X)$ *при* $n \to \infty$ *имеет место для произвольных непрерывных функционалов* $f$, *заданных на* $C[0,1]$, *если эта сходимость имеет место для функционалов вида* $f(x) = w_x(\delta)$ *и* $f(x) = C_1 x(t_1) + \ldots + C_m x(t_m)$, *где* $x \in C[0,1]$.

*Доказательство.* Если сходимость (9) имеет место для произвольных функционалов вида $f(x) = C_1 x(t_1) + \ldots + C_m x(t_m)$, где $x \in C[0,1]$, то в силу утверждения, сформулированного в задаче 1, справедлива сходимость при $n \to \infty$ последовательности случайных процессов $X_n$ к процессу $X$ в смысле сходимости конечномерных распределений. Если сходимость (9) имеет место для произвольных функционалов вида $f(x) = w_x(\delta)$, то, как показано во второй части доказательства теоремы 1, выполнено условие (2). Таким образом, выполнены все условия теоремы 1. Поэтому $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \to \infty$ и, следовательно (см. теорему 1 лекции 4), имеет место сходимость (9) для произвольных непрерывных функционалов $f$, заданных на $C[0,1]$. Теорема доказана.

Интересно понять, как соотносятся между собой условия теоремы 1. В частности, не вытекает ли условие (2) из сходимости конечномерных распределений? Следующий пример показывает, что это не так.

**Пример 1.** Рассмотрим случайные процессы (не зависящие от $\omega$) с непрерывными траекториями: $X(t) \equiv 0$ и при $n \in \mathbb{N}$

$$X_n(t) = \begin{cases} nt, \ 0 \le t \le 1/n; \\ 2 - nt, \ 1/n \le t \le 2/n; \\ 0, \ 2/n \le t \le 1. \end{cases}$$

Ясно, что конечномерные распределения процесса $X_n$ сходятся при $n \to \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса $X$, но условие (2) не выполняется. Таким образом, из сходимости в смысле конечномерных распределений не следует сходимость по распределению в пространстве $C[0,1]$.

**Теорема 3**. *Пусть* $X, X_1, X_2, \ldots$ – *случайные процессы с непрерывными на отрезке* $[0,1]$ *траекториями. Предположим, что последовательность процессов* $\{X_n\}$ *сходится при* $n \to \infty$ *в смысле конечномерных распределений к процессу* $X$ *и при всех* $n \in \mathbb{N}$ и $t, s \in [0,1]$

$$\mathbf{E}_n \left| X_n(t) - X_n(s) \right|^a \le C \left| t - s \right|^{1+b}, \tag{10}$$

*где* $a, b, C$ – *положительные постоянные. Тогда* $X_n \xrightarrow{D} X$ *при* $n \to \infty$ (*по распределению в пространстве* $C[0,1]$).

*Доказательство.* В силу теоремы 1 достаточно установить, что для любого $\varepsilon > 0$
$$\lim_{l\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n \left( w_{X_n} \left( 2^{-l} \right) \geq \varepsilon \right) = 0. \tag{11}$$
Обозначим $\mathbb{Q}_2$ множество точек вида $k/2^m$, где $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0, 1, \ldots, 2^m\}$. Если $x \in C[0,1]$, то, очевидно,
$$w_x \left( 2^{-l} \right) = \sup_{t,s\in\mathbb{Q}_2:\ |t-s|\leq 2^{-l},} |x(t) - x(s)|. \tag{12}$$

Покажем, что
$$\sup_{t,s\in\mathbb{Q}_2:\ |t-s|\leq 2^{-l}} |x(t) - x(s)| \leq 3 \sum_{m=l}^{\infty} \sup_{k\in\{1,\ldots,2^m\}} \left| x\left(\frac{k}{2^m}\right) - x\left(\frac{k-1}{2^m}\right) \right|. \tag{13}$$

Сначала установим, что если $t, s \in \mathbb{Q}_2$ и $|t-s| \leq 2^{-l}$, то
$$|x(t) - x(s)| \leq 3 \sup_{j\in\{1,\ldots,2^l\}} \sup_{u\in\left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right]\cap\mathbb{Q}_2} \left| x(u) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right|. \tag{14}$$

Действительно, поскольку $|t-s| \leq 2^{-l}$, то 1) либо $t, s \in \left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right]$ при некотором $j \in \left\{1, \ldots, 2^l\right\}$ и тогда
$$|x(t) - x(s)| \leq \left| x(t) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| + \left| x(s) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| \leq$$
$$\leq 2 \sup_{u\in\left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right]\cap\mathbb{Q}_2} \left| x(u) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| \leq$$
$$\leq 2 \sup_{j\in\{1,\ldots,2^l\}} \sup_{u\in\left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right]\cap\mathbb{Q}_2} \left| x(u) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right|,$$
2) либо (при $t > s$) $t \in \left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right]$, а $s \in \left[\frac{j-2}{2^l}, \frac{j-1}{2^l}\right]$ при некотором $j \in \left\{2, \ldots, 2^l\right\}$ и тогда
$$|x(t) - x(s)| \leq \left| x(t) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| + \left| x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) - x\left(\frac{j-2}{2^l}\right) \right| +$$
$$+ \left| x(s) - x\left(\frac{j-2}{2^l}\right) \right| \leq$$
$$\leq 2 \sup_{u\in\left[\frac{j-2}{2^l}, \frac{j-1}{2^l}\right]\cap\mathbb{Q}_2} \left| x(u) - x\left(\frac{j-2}{2^l}\right) \right| + \sup_{u\in\left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right]\cap\mathbb{Q}_2} \left| x(u) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| \leq$$
$$\leq 3 \sup_{j\in\{1,\ldots,2^l\}} \sup_{u\in\left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right]\cap\mathbb{Q}_2} \left| x(u) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right|.$$
Тем самым, соотношение (14) установлено.

Пусть $u \in \left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right]\cap\mathbb{Q}_2$ для некоторого $j \in \left\{1, \ldots, 2^l\right\}$, тогда существуют такие натуральные числа $r_1, r_2, \ldots, r_q$, что $l < r_1 < r_2 < \ldots < r_q$ и
$$u = \frac{j-1}{2^l} + \sum\nolimits_{i=1}^{q} \frac{1}{2^{r_i}},$$

где $l < r_1 < r_2 < \ldots < r_q$; значит,

$$\left|x\left(u\right)-x\left(\frac{j-1}{2^l}\right)\right| \leq \left|x\left(\frac{j-1}{2^l}+\frac{1}{2^{r_1}}\right)-x\left(\frac{j-1}{2^l}\right)\right|+$$

$$+\left|x\left(\frac{j-1}{2^l}+\frac{1}{2^{r_1}}+\frac{1}{2^{r_2}}\right)-x\left(\frac{j-1}{2^l}+\frac{1}{2^{r_1}}\right)\right|+\ldots \leq$$

$$\leq \sum_{m=l}^{\infty} \sup_{k\in\{1,\ldots,2^m\}} \left|x\left(\frac{k}{2^m}\right)-x\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right|. \tag{15}$$

Правая часть (15) не зависит ни от $u$, ни от $j$; следовательно, ввиду (14)

$$|x\left(t\right)-x\left(s\right)| \leq 3 \sup_{j\in\{1,\ldots,2^l\}} \sup_{u\in\left[\frac{j-1}{2^l},\frac{j}{2^l}\right]\cap\mathbb{Q}_2} \left|x\left(u\right)-x\left(\frac{j-1}{2^l}\right)\right| \leq$$

$$\leq 3\sum_{m=l}^{\infty} \sup_{k\in\{1,\ldots,2^m\}} \left|x\left(\frac{k}{2^m}\right)-x\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right|,$$

если $t, s \in \mathbb{Q}_2$ и $|t-s| \leq 2^{-l}$, т.е. соотношение (13) доказано.

Известно, что $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} = \pi^2/6$, поэтому из соотношений (12) и (13) находим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}_n\left(w_{X_n}\left(2^{-l}\right) \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}_n\left(\sup_{t,s\in\mathbb{Q}_2:\ |t-s|\leq 2^{-l},} |X_n\left(t\right)-X_n\left(s\right)| \geq \varepsilon\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_n\left(\sum_{m=l}^{\infty} \sup_{k\in\{1,\ldots,2^m\}} \left|X_n\left(\frac{k}{2^m}\right)-X_n\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{m=l}^{\infty} \mathbf{P}_n\left(\sup_{k\in\{1,\ldots,2^m\}} \left|X_n\left(\frac{k}{2^m}\right)-X_n\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon_1}{m^2}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{m=l}^{\infty} \sum_{k\in\{1,\ldots,2^m\}} \mathbf{P}_n\left(\left|X_n\left(\frac{k}{2^m}\right)-X_n\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon_1}{m^2}\right), \tag{16}$$

где $\varepsilon_1 = 2\varepsilon/\pi^2$. Ввиду (10) при $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}_n\left(\left|X_n\left(\frac{k}{2^m}\right)-X_n\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon_1}{m^2}\right) \leq \frac{C}{\varepsilon_1^a}\frac{m^{2a}}{2^{m(1+b)}}. \tag{17}$$

Из соотношений (16), (17) получаем, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}_n\left(w_{X_n}\left(2^{-l}\right) \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C}{\varepsilon_1^a}\sum_{m=l}^{\infty} 2^m \frac{m^{2a}}{2^{m(1+b)}} = \frac{C}{\varepsilon_1^a}\sum_{m=l}^{\infty}\frac{m^{2a}}{2^{mb}}.$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(w_{X_n}\left(2^{-l}\right) \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C}{\varepsilon_1^a}\sum_{m=l}^{\infty}\frac{m^{2a}}{2^{mb}} \underset{l\to\infty}{\to} 0,$$

откуда вытекает требуемое соотношение (11). Теорема доказана.