Лекция 2

Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации

До сих пор мы ничего не говорили о свойствах траекторий случайного процесса как функций времени. Из физических соображений можно, например, сделать вывод, что траектории броуновского движения непрерывны. Но можно ли, зная конечномерные распределения процесса, утверждать, что его траектории непрерывны? Оказывается, нет.

Пример. Пусть $\{X(t)\,,\ t \in [0,1]\}$ – случайный процесс с непрерывными траекториями. Рассмотрим на том же вероятностном пространстве случайную величину τ, имеющую равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Положим

$$\widetilde{X}(t) = \begin{cases} X(t)\,, & t \in [0,\tau) \cup (\tau,1]\,; \\ X(t)+1, & t = \tau. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что $\left\{\widetilde{X}(t)\,,\ t \in [0,1]\right\}$ также является случайным процессом. Очевидно, что траектории этого процесса разрывны. С другой стороны, про фиксированном $t \in [0,1]$

$$\mathbf{P}\left(X(t) = \widetilde{X}(t)\right) = \mathbf{P}(\tau \neq t) = 1.$$

Откуда следует, что совпадают конечномерные распределения процессов $\{X(t)\,,\ t \in [0,1]\}$ и $\left\{\widetilde{X}(t)\,,\ t \in [0,1]\right\}$.

Этот пример также показывает, что подмножества $R[0,1]$ вида

$$A = \left\{x : \sup_{t \in [0,1]} x(t) \le a\right\}, \qquad B = \{x : x \in C[0,1]\}$$

не принадлежат цилиндрической алгебре $\mathcal{G}$ (здесь $R[0,1]$ и $C[0,1]$ – пространства соответственно всех числовых и всех непрерывных числовых функций, заданных на отрезке $[0,1]$). Действительно, если $A \in \mathcal{G}$, то вероятности $\mathbf{P}(X \in A)$ и $\mathbf{P}\left(\widetilde{X} \in A\right)$ совпадают, поскольку совпадают конечномерные распределения процессов X и $\widetilde{X}$ и, значит, совпадают распределения этих процессов. Пусть $X \equiv 0$ и $a \in (0,1)$, тогда $\mathbf{P}(X \in A) = 1$, а $\mathbf{P}\left(\widetilde{X} \in A\right) = 0$. Противоречие.

Отсутствие множеств вида A и B в цилиндрической σ-алгебре является серьезным препятствием в исследовании случайных процессов с вероятностной точки зрения. Одним из возможных выходов из указанной ситуации является рассмотрение процессов с непрерывными траекториями или процессов с траекториями без разрывов второго рода. Действительно, если траектории случайного процесса X непрерывны, то вместо пространства

$R\,[0,1]$ можно рассматривать пространство $C\,[0,1]$ с заданной на нем цилиндрической σ-алгеброй. В этом случае множество A принадлежит этой σ-алгебре. Действительно,

$$A = \left\{ x : \sup_{t\in[0,1]} x\,(t) \le a \right\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left\{ x : \sup_{k\in\{0,1,\ldots,m\}} x\left(\frac{k}{m}\right) \le a \right\},$$

причем правая часть является пересечением счетного числа цилиндрических множеств и, следовательно, сама принадлежит цилиндрической σ-алгебре.

В связи со сказанным возникает вопрос о существовании процесса с заданными конечномерными распределениями и, например, с непрерывными траекториями.

Определение 1. Говорят, что случайные процессы $\{X_1\,(t)\,,\ t \ge 0\}$ и $\{X_2\,(t)\,,\ t \ge 0\}$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, *эквивалентны*, если при каждом $t \ge 0$ выполняется п.н. (почти наверное) равенство $X_1\,(t) = X_2\,(t)$. При этом каждый из этих процессов называется *модификацией* другого.

Очевидно, что если процессы эквивалентны, то совпадают их конечномерные распределения и, следовательно, совпадают распределения этих процессов.

Следующий результат дает ответ на поставленный вопрос и называется *теоремой Колмогорова о существовании непрерывной модификации*.

Теорема 1. *Пусть случайный процесс* $\{X\,(t)\,,\ t \in [0,1]\}$ *удовлетворяет условию*: *при всех* $s,t \in [0,1]$

$$\mathbf{E}\,|X\,(t) - X\,(s)|^a \le C\,|t-s|^{1+b}\,, \tag{1}$$

где a,b,C *– положительные постоянные. Тогда у процесса* $\{X\,(t)\,,\ t \in [0,1]\}$ *существует модификация, траектории которой непрерывны.*

Доказательство. 1) Для произвольной функции $x \in R\,[0,1]$ построим ее кусочно-линейное приближение $x^{(\delta)}$ при $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$:

$$x^{(\delta)}\,(t) = x\,(\delta k) + \frac{t-\delta k}{\delta}\left[x\,(\delta\,(k+1)) - x\,(\delta k)\right],$$

если $t \in [\delta k, \delta\,(k+1)]$, $k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$. Заметим, что $x^{(\delta)} \in C\,[0,1]$. Разберемся, что произойдет в случае перехода от $x^{(\delta)}$ к $x^{(\delta/2)}$. Каждый из m одинаковых по длине отрезков вида $[\delta k, \delta\,(k+1)]$ делится пополам. График прямой на каждом из этих m отрезков заменяется на график одной прямой до середины этого отрезка и график другой прямой после этой середины, причем все эти три графика образуют треугольник. Из сказанного следует, что при всех $k \in \{0,\ldots,m-1\}$

$$\sup_{t\in[k/m,(k+1)/m]} \left| x^{(\delta)}\,(t) - x^{(\delta/2)}\,(t) \right| \le$$

$$\le \left| x\left(\frac{k}{m}\right) - x\left(\frac{2k+1}{2m}\right) \right| + \left| x\left(\frac{2k+1}{2m}\right) - x\left(\frac{k+1}{m}\right) \right|. \tag{2}$$

Положим при $\varepsilon > 0$ и $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

$$B_k = \left\{ \sup_{t \in [k/m, (k+1)/m]} \left| X^{(\delta)}(t) - X^{(\delta/2)}(t) \right| \geq \varepsilon \right\}.$$

Ввиду соотношения (2)

$$\mathbf{P}(B_k) \leq \mathbf{P}\left(\left| X\left(\frac{k}{m}\right) - X\left(\frac{2k+1}{2m}\right) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) +$$

$$+\mathbf{P}\left(\left| X\left(\frac{2k+1}{2m}\right) - X\left(\frac{k+1}{m}\right) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

По неравенству Чебышева, используя условие (1), находим, что при всех $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

$$\mathbf{P}\left(\left| X\left(\frac{k}{m}\right) - X\left(\frac{2k+1}{2m}\right) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\varepsilon/2)^a} \mathbf{E} \left| X\left(\frac{k}{m}\right) - X\left(\frac{2k+1}{2m}\right) \right|^a \leq \frac{C}{(2m)^{1+b}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-a}.$$

Аналогично

$$\mathbf{P}\left(\left| X\left(\frac{2k+1}{2m}\right) - X\left(\frac{k+1}{m}\right) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{C}{(2m)^{1+b}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-a}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(B_k) \leq \frac{2C}{(2m)^{1+b}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-a}.$$

Введем на пространстве $C[0,1]$ *метрику равномерной сходимости*: при $x, y \in C[0,1]$

$$\rho_{\text{равн}}(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)|.$$

Замечая, что

$$\left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| X^{(\delta)}(t) - X^{(\delta/2)}(t) \right| \geq \varepsilon \right\} \subset \bigcup_{k=0}^{m-1} B_k,$$

получаем, что

$$\mathbf{P}\left(\rho_{\text{равн}}\left(X^{(\delta)}, X^{(\delta/2)} \right) \geq \varepsilon \right) \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{m-1} B_k \right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P}(B_k) \leq \frac{C}{(2m)^b} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-a}. \tag{3}$$

2) Для процесса X и каждого $n \in \mathbb{N}_0$ рассмотрим кусочно-линейное приближение этого процесса $X^{(2^{-n})}$. Покажем, что последовательность процессов $\left\{ X^{(2^{-n})},\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ сходится п.н. при $n \to \infty$ в метрике равномерной

сходимости к некоторому процессу $\widetilde{X}$ с непрерывными траекториями. Положим при $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \left\{ \rho_{\text{равн}} \left(X^{\left(2^{-n+1}\right)}, X^{\left(2^{-n}\right)} \right) \geq \frac{\varepsilon}{2^{bn/(2a)}} \right\}.$$

Ввиду соотношения (3)

$$\mathbf{P}\left(A_n\right) \leq \frac{C}{2^{bn}} \left(\frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^{bn/(2a)}} \right)^{-a} = \frac{C}{2^{bn/2}} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{-a}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(A_n\right)$ сходится. По лемме Бореля-Кантелли это означает, что п.н. происходит лишь конечное число событий из совокупности $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Это, в свою очередь, означает наличие такого случайного события A, вероятность которого равна 1, что для каждого $\omega \in A$ существует такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$

$$\rho_{\text{равн}} \left(X^{\left(2^{-n+1}\right)}, X^{\left(2^{-n}\right)} \right) < \frac{\varepsilon}{2^{bn/(2a)}}. \tag{4}$$

Соотношение (4) означает, что при $\omega \in A$ последовательность функций $X^{\left(2^{-n}\right)}(t)$, $t \in [0,1]$, является фундаментальной в смысле равномерной сходимости и, следовательно, по критерию Коши сходится при $n \to \infty$ в равномерной метрике к некоторой непрерывной функции $\widetilde{X}(t)$, $t \in [0,1]$. При $\omega \notin A$ положим $\widetilde{X}(t) = 0$, $t \in [0,1]$. Ясно, что $\widetilde{X} = \left\{ \widetilde{X}(t),\ t \in [0,1] \right\}$ – случайный процесс, причем с непрерывными траекториями. Заметим, что если $\omega \in A$, то по построению $\widetilde{X}\left(k/2^l\right) = X\left(k/2^l\right)$ при всех $l \in \mathbb{N}_0$ и $k \in \left\{0, 1, \ldots, 2^l\right\}$.

3) Покажем, что процесс $\widetilde{X}$ является модификацией процесса X. Зафиксируем $t \in [0,1]$. Из условия (1), применяя неравенство Чебышева, находим, что при $\varepsilon > 0$ и $s \in [0,1]$

$$\mathbf{P}\left(|X(s) - X(t)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C}{\varepsilon^a} |t - s|^{1+b}$$

и, следовательно,

$$\lim_{s \to t} \mathbf{P}\left(|X(s) - X(t)| \geq \varepsilon\right) = 0$$

(в этом случае говорят, что процесс X *стохастически непрерывен* в точке t). Значит, если $\{r_l\}$ – последовательность точек вида $r_l = k/2^l$ (при некотором $k \in \left\{0, 1, \ldots, 2^l\right\}$), сходящаяся к t при $l \to \infty$, то

$$\lim_{l \to \infty} \mathbf{P}\left(|X(r_l) - X(t)| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Последнее соотношение означает, что при $l \to \infty$ имеет место *сходимость по вероятности*:

$$X(r_l) \xrightarrow{P} X(t). \tag{5}$$

С другой стороны, в виду непрерывности процесса $\widetilde{X}$ находим, что $\widetilde{X}(r_l) \to \widetilde{X}(t)$ при $l \to \infty$. Откуда, учитывая, что п.н. $\widetilde{X}(r_l) = X(r_l)$ при всех $l \in \mathbb{N}_0$, получаем, что при $l \to \infty$ имеет место *сходимость почти наверное*:

$$X(r_l) \xrightarrow{\text{п.н.}} \widetilde{X}(t). \tag{6}$$

Из соотношений (5) и (6) следует, что $X(t) = \widetilde{X}(t)$ п.н. (поскольку из сходимости случайной последовательности по вероятности следует сходимость п.н. некоторой ее подпоследовательности). Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть случайный процесс $\{X(t),\ t \geq 0\}$ удовлетворяет условию (1) при $s, t \in [0, +\infty)$. Практически дословно повторяя доказательство, можно установить существование непрерывной модификации процесса X на каждом отрезке $[l-1, l]$, $l \in \mathbb{N}$. Обозначим эти модификации $\left\{X^{(l)}(t),\ t \in [l-1, l]\right\}$. Из доказательства теоремы ясно, что п.н.

$$X^{(l)}(l-1) = X(l-1), \qquad X^{(l)}(l) = X(l). \tag{7}$$

Введем случайный процесс $\left\{\widetilde{X}(t),\ t \geq 0\right\}$: $\widetilde{X}(t) = X^{(l)}(t)$ при $t \in [l-1, l]$, $l \in \mathbb{N}$. Ввиду (7) этот процесс является непрерывным на полуоси $[0, +\infty)$ при всех ω за исключением множества нулевой вероятности, на котором полагаем $\widetilde{X}(t) = 0$, $t \geq 0$. Очевидно, что процесс $\widetilde{X}$ является непрерывной модификацией процесса X на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Применим теорему 1 к броуновскому движению $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$.

Теорема 2. *У броуновского движения существует модификация, траектории которой п.н. непрерывны.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что если $\xi \sim N\left(0, \sigma^2\right)$, то $\mathbf{E}\xi^4 = 3\sigma^4$. Поэтому при всех $t, s \in [0, +\infty)$

$$\mathbf{E}\left|W(t) - W(s)\right|^4 \leq 3\left|t - s\right|^2,$$

т.е. условие (1) выполняется на полуоси $[0, +\infty)$. Теорема доказана.

В дальнейшем, рассматривая броуновское движение W, будем предполагать, что наряду с указанными ранее тремя аксиомами выполняется еще одна:

4) траектории процесса W непрерывны.