Задачи по курсу "Теория вероятностей".

Ниже приведены задачи по курсу "Теория вероятностей", 2017/2018 учебный год, механико-математический факультет, 1 поток, лектор профессор А.М. Зубков.
Список задач отражает направления теории вероятностей, которые должен знать каждый студент, прослушавший курс. Данный список ни в коем случае не является полным собранием задач, которые необходимо уметь решать, а лишь представляет типовые задачи.

1. Классическая модель

Темы:
Классическая модель. Комбинаторика.
Компетенции:
Построение вероятностного пространства. Поиск вероятностей событий путем комбинаторных подсчетов.
Примеры задач:
1.1 На экзамене каждый студент знает первые M билетов из N. n студентов по очереди тянут билеты. Построить вероятностное пространство и найти вероятность того, что k-ый студент вытянет знакомый билет, если билеты тянутся а) с возвращением б) без возвращения.
1.2 Пачку карт из 36 штук разделили на две половины. Найти вероятность того, что в каждой по 2 туза.
1.3 n человек случайно встали в а) линию б) круг. Найти вероятность того, что между Алисой и Бобом стоят k человек.
1.4 Случайно выбирается номер из m цифр от 0 до 9. Какая вероятность того, что а) цифры в номере монотонно возрастают б) цифры в номере монотонно не убывают.
1.5 n человек пришли в гости, сняли плащи и повесили на вешалку. Уходя, каждый надел случайный плащ. Какая вероятность того, что никто не надел своего плаща?
1.6 Пусть n разных шаров случайно раскладываются по n разным ящикам один за другим. Найти вероятность того, что а) все ящики будут заполнены б) ровно один ящик будет пустовать.

2. Условные вероятности

Темы:
Условная вероятность. Теорема произведения. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимость.
Компетенции:
Поиск вероятностей событий путем разбиения их на части. Поиск апостериорных вероятностей. Определение зависимости и независимости событий
Примеры задач:
2.1 В корзинке 20 ягод вишни, из которых 15 без косточки. Боб съел 5 ягод. Алиса берет одну ягоду из оставшихся. Какая вероятность, что ягода будет без косточки?
2.2 По телеграфу равновероятно передали $AAAA$, $BBBB$ или $CCCC$. Каждый символ с вер-ью $1-a$ искажается равновероятно на любой из других. Найти вер-ть того, что послали $AAAA$, если дошло $ABCA$.
2.3 Какая минимальная мощность Ω, если там есть n независимых событий A_i, $P(A_i) \notin \{0,1\}$?
2.4 Построить при заданном n такие зависимые события A_1,...,A_n, что любые $n-1$ из них независимы.
2.5 В урне лежали 3 белых и 3 синих шара. Один из шаров случайно вытащили и выбросили. Из оставшейся урны Боб вытащил (с возвращением) 6 шаров и все 6 оказались синими. Алиса вытащила 600 шаров и 303 из них оказались синими. Кто из них с большей уверенностью может утверждать, что выброшенный шар оказался синим?
2.6 Пусть в урне W белых, B черных и R красных шаров. Пусть $X \sim Poiss(\lambda)$, X_w, X_b — число белых и черных шаров среди X взятых с возвращением. Док-ть, что X_w, X_b независимы и найти их распределения.
2.7 Насекомое откладывает k яиц с вероятностью $\lambda^k \exp(-\lambda)/k!$, $k \geq 0$, из каждого вылупляется потомок с вероятностью p независимо от остальных. Найти вероятность того, что будет ровно r потомков.

3. Случайные величины и их распределения

Темы:
Дискретные и абсолютно-непрерывные величины. Основные распределения. Функции распределения. Распределения функций от случайной величины. Формула свертки.
Компетенции:
Нахождение распределения случайных величин и функций от них. Функция распределения. Нахождение распределения суммы независимых случайных величин.
Примеры задач:
3.1 Случайная величина X принимает значения из отрезка $[0,1]$ с функцией распределения $F_X(x) = x/3 + 1/2$ при $x \in [0,1]$. Найти $\mathbf{P}(X \in A)$, где а) $A = [0,1/2]$, б) $A = [1/2,1)$, в) $A = (0,1)$.

3.2 Найти плотность величины $aX + b$, где X имеет плотность $f_X(x)$, $a \neq 0$, b — константы.
3.3 Выразить ф.р. $X^+ = \max(X, 0)$ через ф.р. X. Найти плотности $|X|$.
3.4 Найти распределение $\max(X_1, ..., X_n)$, где $X_i \sim R[0, 1]$.
3.5 Показать, что минимум из двух н.о.р. $Geom(p)$ есть $Geom(p^2)$.
3.6 Найти распределение суммы независимых $Poiss(\lambda_i)$ величин.
3.7 Найти распределение суммы независимых нормальных $\mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$.
3.8 Найти распределение суммы независимых $\exp(\lambda)$ величин.
3.9 Показать, что если $\mathbf{P}(X \geq x + y | X \geq x) = \mathbf{P}(X \geq y)$ при любых $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где X принимает значения из $\mathbb{N} \cup \{0\}$, то X имеет геометрическое распределение.

4. Случайные векторы

Темы:
Распределения дискретных и абсолютно-непрерывных векторов. Распределение гладкой функции от вектора.
Компетенции:
Нахождения вероятности попадания вектора в множества на основе плотности. Нахождение распределения подвекторов вектора с известным распределением. Преобразование плотности при гладких заменах координат. Определение независимости координат вектора по плотности или функции распределения.
Примеры задач:
4.1 Найти плотность распределения $(X - Y, X + Y)$, где X, Y независимые $\mathcal{N}(0, 1)$. Будут ли $X - Y$ и $X + Y$ независимы?
4.2 Пусть $X, Y \sim R[0, 1]$ и независимы. Найдем совместное распределение $(U, V) = (XY, X/Y)$.
4.3 Три точки равномерно и независимы брошены в отрезок $[0, 1]$. Найти вероятность того, что отрезки, на которые $[0, 1]$ разбит этими точками, таковы, что из них можно сложить треугольник.
4.4 Найти совместное распределение $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$, где X, Y независимые $R[0, 1]$.
4.5 Пусть $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\vec{0}, E)$. Найти совместную плотность $(\sqrt{X^2 + Y^2}, X/Y)$
4.6 Найти совместную плотность XY и Z^2, где (X, Y, Z) равномерно распределена в единичном кубе.
4.7 (X, Y) имеет совместную плотность $f(x, y) = (x + y)e^{-(x+y)}/2$, $x, y \geq 0$. Найти плотность $X + Y$.

5. Математическое ожидание и дисперсия

Темы:
Математическое ожидание в дискретном, абсолютно-непрерывном и общем случае. Математическое ожидание функции от случайной величины или случайного вектора.
Компетенции:
Нахождение математического ожидания и дисперсии на основе распределения случайной величины. Поиск ковариации на основе двумерного распределения. Поиск математического ожидания и ковариации на основе линейности. Поиск математического ожидания с помощью формулы полной вероятности.
Примеры задач:
5.1 Найти математическое ожидание и дисперсию а) геометрической б) нормальной в) экспоненциальной величин.
5.2 Найти математическое ожидание и дисперсию а) биномиальной б) гипергеометрической случайных величин.
5.3 Найти мат. ожидание $\max(X_1, ..., X_n)$, где X_i — н.о.р равномерные на отрезке $[0, 1]$.
5.4 X, Y имеют совместную плотность $2e^{-x-y}$, $0 < x < y < \infty$. Найти $cov(X, Y)$.
5.5 Пусть N шаров раскладывается по n ячейкам независимо друг от друга, X — число занятых ячеек. Найти EX, DX.
5.6 Пусть 100 человек расселось в кинотеатре, заняв все места. Первые 99 занимают случайные места, а 100ый садится на свое положенное место. Если на его месте уже кто-то есть, он сгоняет этого человека, тот идет на свое место и так далее. Найти математическое ожидание величины X_{100} — числа потревоженных зрителей.
5.7 Показать, что математическое ожидание величины X со значениями из $[0, \infty)$ равно $\int_0^\infty (1 - F(x))dx$, где F — ф.р. X.

6. Производящие и характеристические функции

Темы:
Определение и свойства производящих и характеристических функций. Формулы обращения для характеристических функций в дискретном и абсолютно-непрерывном случаях. Характеристическая функция вектора.
Компетенции:
Определение того, является ли функция характеристической. Владение основными свойствами х.ф. Нахождение плотности или распределение по характеристической функции. Поиск распределений с помощью соотношений на характеристические функции.
Примеры задач:
6.1 Является ли производящей функцией $f(s) = s^3 e^{s-1}$, $f(s) = e^{e^{s-1}-1}$, $f(s) = \ln(e - 1 + s)$?

6.2 Является ли характеристической функций $\phi(t) = \cos t$, $\phi(t) = \cos^2(3t)$, $\phi(t) = e^{3it}e^{-t^2/2}e^{e^{it}-1}$, $\cos t^2$.
6.3 Может ли сумма независимых величин, одна из которых стандартная нормальная, иметь распределение Коши?
6.4 Найти распределение $X_1 + ... + X_N$, где N — пуассоновская λ, X_i — н.о.р. бернуллиевские p, независящие от N.
6.5 Показать, что если $X_k \sim Poiss(p^k/k)$ независимы, то $\sum_{k=1}^{\infty} kX_k \sim Geom(p)$.
6.6 Показать, что $(X_1 + ... + X_n)/n$ имеет распределение Коши, где X_i н.о.р. Коши.

7. Виды сходимости

Темы:
Определение и свойства четырех видов сходимости. Связь сходимостей. Слабая сходимость и сходимость характеристических функций.
Компетенции:
Определение того, сходится ли последовательность в том или ином виде. Доказательство свойств сходимости. Слабая сходимость и сходимость х.ф.
Примеры задач:
7.1 Доказать, что из $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y$ следует $aX_n + Y_n \xrightarrow{P} aX + Y$.
7.2 Пусть X_i - н.о.р. с равн. распр. на $[0, 1]$. Найти предел по распределению $n \min_{i \le n} X_i$.
7.3 Доказать, что из $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} C$ следует $aX_n + Y_n \xrightarrow{d} aX + C$. Верно ли то же, если предел Y_n не константа?
7.4 Для каких сходимостей из $X_n \to X$, $Y_n \to Y$ следует $X_nY_n \to XY$?
7.5 $X_n \sim Poiss(n)$. Найти предел по распределению сл.в. $(X_n - n)/\sqrt{n}$
7.6 $X_{i,n} \sim Bern(p_{i,n})$, $i \le n$ независимы, $p_{1,n} + ... + p_{n,n} \to \lambda$, $n \to \infty$, $\max_{i \le n} p_{i,n} \to 0$. Показать, что $X_{1,n} + ... + X_{n,n}$ сходятся по распределению к $Poiss(\lambda)$.
7.7 X_i равновероятно принимают значения ± 1 и независимы. Показать, что $\sqrt{3/n^3} \sum_{k=1}^{n} kX_k$ сходится и найти предел.